Entrée en terminale – Spécialité maths - Corrigés

Partie 1 – Polynôme du second degré

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 10x + 5$

a) Déterminer la forme canonique de f.
b) En déduire l'extremum (maximum ou minimum) de f et la valeur de x pour lequel il est atteint.
c) Mêmes questions avec $g(x) = -2x^2 + 8x - 13$

$f(x) = (x-5)^2 - 15$ f atteint un minimum de -15 en x = 5.

$g(x) = -2(x-2)^2 - 5$ g atteint un maximum de -5 en x = 2.

Exercice 2 :

Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes puis donner leur tableau de variation :

a) $f(x) = 2x^2 - 12x + 3$ b) $f(x) = -3(x+1)^2 - 5$ c) $f(x) = x(x-8)$

a) La fonction f est lune fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 4x - 12$

$f'(x)$ s'annule en $x = 3$.
f est strictement croissante sur $[3; +\infty[$; f est strictement décroissante sur $]-\infty; 3]$

x		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-15	↗

b) La fonction f est lune fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = -6(x+1)$

$f'(x)$ s'annule en $x = -1$.
f est strictement décroissante sur $[-1; +\infty[$; f est strictement croissante sur $]-\infty; -1]$

x		-1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-5	↘

c) La fonction f est lune fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 2x - 8$

$f'(x)$ s'annule en $x = 4$.
f est strictement croissante sur $[4; +\infty[$; f est strictement décroissante sur $]-\infty; 4]$

x		4	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-16	↗

Exercice 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $(E_1):\ 6x^2 - 7x - 3 = 0$ b) $(E_2):\ x^2 - 19x - 216 = 0$ c) $(E_3):\ x^4 - x^2 - 2 = 0$

$d)(I_1): 8\,x^2 - 2x - 3 < 0$ e) $(I_2): \frac{x^2-x-20}{3x^2-20x-7} \geq 0$

a) $(E_1):\ 6x^2 - 7x - 3 = 0$ $\quad S = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$

b) $(E_2):\ x^2 - 19x - 216 = 0$ $\quad S = \{-9; 24\}$

c) $(E_3):\ x^4 - x^2 - 2 = 0$

On effectue un changement de variable en posant $X = x^2$ et on résout l'équation : (E): $X^2 - X - 2 = 0$ qui a deux racines évidentes -1 et 2.

(E): $X^2 - X - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow X = -1\ ou\ X = 2 \Leftrightarrow\ x = \sqrt{2}\ ou\ x = -\sqrt{2}$

$$S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$

$$d)(I_1): 8\,x^2 - 2x - 3 < 0$$

Le polynôme $8\,x^2 - 2x - 3$ s'annule en $x = -\frac{1}{2}$ et $x = \frac{3}{4}$.

Le coefficient de x^2 étant positif, le polynôme est négatif à l'intérieur des racines.

$$S = \left]-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right[$$

$e)(I_2): \frac{x^2-x-20}{3x^2-20x-7} \geq 0$

$\frac{x^2-x-20}{3x^2-20x-7}$ est défini sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}; 7\right\}$.

$x^2 - x - 20$ s'annule en $x = -4$ et $x = 5$. Le coefficient de x^2 étant positif, le polynôme est positif à l'extérieur des racines. Idem pour le polynôme $3x^2 - 20x - 7$.

x	$-\infty$		-4		$-\frac{1}{3}$		5		7		$+\infty$
$x^2 - x - 20$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x^2 - 20x - 7$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x^2 - x - 20}{3x^2 - 20x - 7}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$S = \ ]-\infty; -4] \cup \left]\frac{-1}{3}; 5\right] \cup\ ]7; +\infty[$

<u>Exercice 4 :</u>

m est un réel fixé différent de $\frac{3}{2}$. P_m est un polynôme défini par $P_m(x) = (2m - 3)\,x^2 - 2mx - 1$.

1) Calculer le discriminant du polynôme P_m.
2) Pour quelles valeurs de m l'équation $P_m(x) = 0$ n'admet-elle qu'une solution ?
3) Pour quelles valeurs de m l'équation $P_m(x) = 0$ n'admet-elle aucune solution dans $\mathbb{R}$?
4) Pour quelles valeurs de m a-t-on $P_m(x) > 0$ pour tout réel x ?

$m \neq \frac{3}{2}$ donc P_m est un polynôme du 2nd degré.

1) $\Delta = 4\,m^2 - 4(2m - 3) \times (-1) = 4\,m^2 + 8m - 12 = 4(\,m^2 + 2m - 3)$

Le polynôme $m^2 + 2m - 3$ a une racine évidente 1 et une deuxième racine -3.

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m = -3$

$P_m(x) = 0$ n'admet qu'une solution si et seulement si $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m = -3$

$P_m(x) = 0$ n'admet aucune solution si et seulement si $\Delta < 0 \Leftrightarrow\ m^2 + 2m - 3 < 0\ \Leftrightarrow m \in\ ]-3; 1[$

$P_m(x) > 0$ si et seulement si $\Delta < 0\ et\ 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow m \in\ ]-3; 1[\ et\ m > \frac{3}{2}$. $\quad S = \emptyset$

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ et un réel h non nul. On désigne par Cf sa courbe représentative.

1) Vérifier que $f(-3+h) = 3h^2 - 20h + 34$
2) En déduire que le taux de variation de f entre -3 et $-3+h$ est $\tau(h) = 3h - 20$
3) La fonction est-elle dérivable en -3 ? Si oui, préciser le nombre dérivé.
4) Déterminer l'équation de la tangente à Cf au point d'abscisse -3.

1) Pour tout réel h non nul, $f(-3+h) = 3(-3+h)^2 - 2(-3+h) + 1 = 3h^2 - 20h + 34$

2) Pour tout réel h non nul, $\tau(h) = \frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \frac{3h^2-20h+34-34}{h} = 3h - 20$

3) $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = -20$ qui est une limite finie donc la fonction f est dérivable en -3 *et* $f'(-3) = -20$.

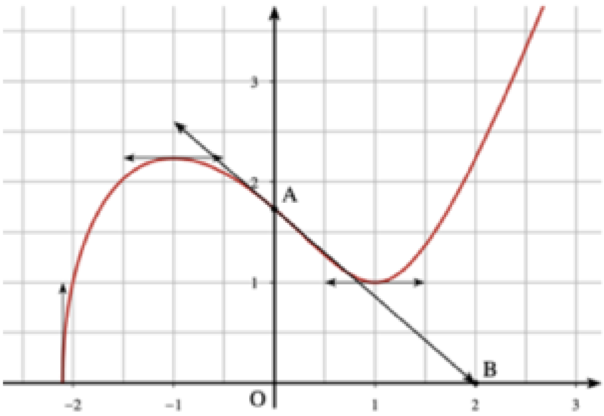
4)L'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse -3 est : $y = f'(-3)(x+3) + f(-3)$

$$y = -20(x+3) + 34$$

$$y = -20x - 26$$

Exercice 6 :

Soit la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2{,}1; +\infty[$. La tangente à cette courbe en A(0 ;1,73) passe par le point B(2 ;0).



Par lecture graphique, compléter le tableau suivant :

x	-1	0	1
$f(x)$	2,25	1,75	1
$f'(x)$	0	$-\frac{1{,}73}{2} = -0{,}865$	0

Exercice 7 :

Pour chacune des fonctions suivantes, écrire son domaine de définition, de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

$f_1(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$	$f_2(x) = \sqrt{x}(2x+1)$	$f_3(x) = (2x-3)(x^2 + 4x - 1)$

$f_4(x)=\dfrac{x-5}{x+2}$	$f_5(x)=\dfrac{2x+5}{x^2+x+3}$	$f_6(x)=\dfrac{5}{x^2-1}$
$f_7(x)=\sqrt{2-3x}$	$f_8(x)=(-5x+4)^2$	

f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_1(x)=\frac{2}{3}\times 3x^2-\frac{1}{2}\times 2x-6=2x^2-x-6$

f_2 est définie sur $[0;+\infty[$ et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'_2(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(2x+1)+\sqrt{x}\times 2$

$$f'_2(x)=\frac{\sqrt{x}}{2x}\times(2x+1)+2\sqrt{x}=3\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2x}$$

f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_3(x)=2(\,x^2+4x-1)+(2x-3)(\,2x+4)$

$$f'_3(x)=2x^2+8x-2+4x^2+2x-12=6x^2+10x-14$$

f_4 est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ et dérivable sur $]-\infty\,;-2[$ et sur $]-2\,;+\infty[$

$$f'_4(x)=\frac{1\times(x+2)-1\times(x-5)}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$$

f_4 est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ et dérivable sur $]-\infty\,;-2[$ et sur $]-2\,;+\infty[$

$f_5(x)=\frac{2x+5}{x^2+x+3}$ Le polynôme x^2+x+3 a pour discriminant -11 et n'admet donc pas de racine réelle. Le dénominateur ne s'annule donc pas. f_5 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'_5(x)=\frac{2\times(x^2+x+3)-(2x+5)\times(2x+1)}{(x^2+x+3)^2}=\frac{2x^2+2x+6-(4x^2+12x+5)}{(x^2+x+3)^2}$$

$$f'_5(x)=\frac{-2x^2-10x+1}{(x^2+x+3)^2}$$

$f_6(x)=\frac{5}{x^2-1}$ Le polynôme x^2-1 a pour racines $+1$ et -1. f_5 est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ et dérivable sur $]-\infty\,;-1[$, sur $]-1\,;1[$et sur $]1\,;+\infty[$.

$$f'_6(x)=\frac{0\times(x^2-1)-(2x)\times 5}{(x^2-1)^2}=\frac{-10x}{(x^2-1)^2}$$

$f_7(x)=\sqrt{2-3x}$. f_7 est une fonction composée définie sur $\left]-\infty;\frac{2}{3}\right]$et dérivable sur $\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[$

$$f'_7(x)=\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}$$

$f_8(x)=(-5x+4)^2$ f_7 est une fonction composée définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'_8(x)=-5\times 2(-5x+4)=-10(-5x+4)$$

<u>Exercice 8 :</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2-4x+7}{x-1}$. On désigne par Cf sa courbe représentative.

1) Calculer la dérivée de f et montrer que $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$
2) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
3) Déterminer l'équation de la tangente T à Cf au point d'abscisse 2.
4) Existe-t-il des tangentes à Cf parallèles à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 5$? Si oui, en quels points ?

Corrigé :

f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et dérivable sur $]-\infty\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$.

1) $f'(x) = \dfrac{(2x-4)(x-1)-1(x^2-4x+7)}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2-2x-4x+4-x^2+4x-7}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

2) $f'(x) = 0$, $x_1 = -1$ racine évidente, $P = -3$ donc $x_2 = 3$.
Signe $f'(x)$ = signe (x^2-2x-3) car $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}$, $(x-1)^2 > 0$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-6	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$f(-1) = \dfrac{1+4+7}{-2} = -6$

$f(3) = \dfrac{9-12+7}{2} = 2$

3) $(T) : y = f'(2)(x-2) + f(2)$ avec $f'(2) = -3$ et $f(2) = 3$
$(T) : y = -3(x-2) + 3 \Leftrightarrow y = -3x + 9$

4) $f'(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2-4x-6 = x^2-2x+1 \Leftrightarrow x^2-2x-7 = 0$

$\Delta = 4 + 28 = 32 = (4\sqrt{2})^2$ d'où $x_1 = \dfrac{2+4\sqrt{2}}{2} = 1 + 2\sqrt{2}$ ou $x_2 = 1 - 2\sqrt{2}$.

Il existe 2 tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ parallèles à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - 5$ en $x = 1 + 2\sqrt{2}$ et $x = 1 - 2\sqrt{2}$.

Partie 3 – Exponentielle

Exercice 9 :

Simplifier les écritures suivantes :

$(e^x)^3 e^{-2x}$	$\dfrac{e^{x-1}}{e^{x+2}}$	$\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x}$	$e^{-x}e^2$	$\dfrac{e^{3x}}{(e^{-x})^2 e^x}$	$\dfrac{e^x e^y}{e^{x-y}}$	$\dfrac{(e^{-3x})^2 e^{5x}}{e^{-x}}$
$e^{3x}e^{-2x} = e^x$	$e^{x-1-(x+2)} = e^{-3}$	$1 + e^{-2x}$	e^{2-x}	$\dfrac{e^{3x}}{e^{-2x}e^x} = e^{3x+2x-x} = e^{4x}$	$e^{x+y-x+y} = e^{2y}$	$e^{-6x+5x+x} = 1$

Exercice 10 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $(E_1): e^{3-x} = 1$ b) $(E_2) :\ e^{2\,x^2+3} = e^{7x}$ c) $(E_3): 2e^{-x} = \frac{1}{e^x+2}$ d) $(E_4): e^{x+1} = e^{\frac{1}{x}}$

$e)$ (E_5): $e^{2x}+2e^x-3=0$ (changer de variable)

$f)(I_1)$: $(e^x)^3 \leq e^{x-2}$ g) (I_2): $e^x > \frac{1}{e^x}$ h) (I_3): $(e^x-1)e^x > e^x-1$

Montrer que : $3e^{2x}+e^x-4=(e^x-1)(3e^x+4)$. En déduire le signe de $3e^{2x}+e^x-4$ en fonction de x.

a) $(E_1) \Leftrightarrow e^{3-x}=e^0$
$(E_1) \Leftrightarrow 3-x=0$
$(E_1) \Leftrightarrow x=3$
$S=\{3\}$

b) $(E_2) \Leftrightarrow 2x^2+3=7x$
$(E_2) \Leftrightarrow 2x^2-7x+3=0$
Le polynôme $2x^2-7x+3$ a pour discriminant 25 et pour racines 3 et $\frac{1}{2}$.
$(E_2) \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ ou $x=3$
$S=\left\{\frac{1}{2};3\right\}$
c) (E_3): $2e^{-x}=\frac{1}{e^x+2}$ Pour tout réel $x, e^x+2>0$. Résolvons (E_3) dans $\mathbb{R}$.

$(E_3) \Leftrightarrow 2e^{-x}(e^x+2)=1$

$(E_3) \Leftrightarrow 2+4e^{-x}=1$

$(E_3) \Leftrightarrow 4e^{-x}=-1$ or Pour tout réel $x, 4e^{-x}>0$. Donc, S= $\emptyset$

d) (E_4): $e^{x+1}=e^{\frac{1}{x}}$ Résolvons (E_3) dans $\mathbb{R}^*$.

Pour x non nul,

$(E_4) \Leftrightarrow x+1=\frac{1}{x}$

$(E_4) \Leftrightarrow x^2+x-1=0$ Le polynôme x^2+x-1 a pour discriminant 5 et pour racines $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
$S=\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

$e)$ (E_5): $e^{2x}+2e^x-3=0$. Résolvons (E_5) dans $\mathbb{R}$.

On pose X=e^x. Pour tout réel $x, e^x>0$ donc $X \geq 0$.

Pour X réel positif ou nul, $(E_5) \Leftrightarrow X^2+2X-3=0$.

Le polynôme X^2+2X-3 a pour discriminant 16 et pour racines -3 et 1. Or, $X \geq 0$ donc $X=1$.

$(E_5) \Leftrightarrow e^x=1$

$(E_5) \Leftrightarrow x=0$
$S=\{0\}$

$f)(I_1)$: $(e^x)^3 \leq e^{x-2}$ Résolvons (I_1) dans $\mathbb{R}$.

$(I_1) \Leftrightarrow 3x \leq x-2$

$(I_1) \Leftrightarrow x \leq -1$ $S=\,]-\infty;-1]$

g) (I_2): $e^x > \frac{1}{e^x}$ Résolvons (I_2) dans $\mathbb{R}$.

$(I_2) \Leftrightarrow e^{2x} > e^0$

$(I_2) \Leftrightarrow 2x > 0$ $\quad S = \mathbb{R}^{+*}$

h) (I_3): $(e^x - 1)e^x > e^x - 1$ Résolvons (I_3) dans $\mathbb{R}$.

$(I_3) \Leftrightarrow (e^x - 1)e^x - (e^x - 1) > 0$

$(I_3) \Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x - 1) > 0$

$(I_3) \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 > 0$ $\quad S = \mathbb{R}^*$

Montrer que : $3e^{2x} + e^x - 4 = (e^x - 1)(3e^x + 4)$. En déduire le signe de $3e^{2x} + e^x - 4$ en fonction de x.

$$\text{Pour tout réel } x, (e^x - 1)(3e^x + 4) = 3e^{2x} + 4e^x - 3e^x - 4 = 3e^{2x} + e^x - 4$$

On pose X=e^x. Pour tout réel $x, e^x > 0$ donc $X \geq 0$.

Pour X réel positif ou nul, $3e^{2x} + e^x - 4 \Leftrightarrow 3X^2 + X - 4$.

Le polynôme $3X^2 + X - 4$ a pour discriminant 49 et pour racines 1 et $-\frac{4}{3}$.

Or, $X \geq 0$, donc le polynôme $3e^{2x} + e^x - 4$ a pour seule racine 0.
$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$
Donc, $3e^{2x} + e^x - 4 > 0$ sur $]0; +\infty[$
$3e^{2x} + e^x - 4 < 0$ sur $]-\infty; 0[$
$3e^{2x} + e^x - 4$ s'annule en $x = 0$.

<u>Exercice 11 :</u>
Déterminer les dérivées puis en déduire le sens de variation des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (x^2 - 2x)\, e^x$ b) $g(x) = \frac{1}{x} e^x$ c) $h(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x + 1}$ d) $k(x) = e^{-2x+1}$

e) $m(x) = xe^{2x^2 - 3}$

a) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x)e^x = (x^2 - 2)e^x$

Pour tout réel $x, e^x > 0$. Donc, le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $x^2 - 2$.

$f'(x) > 0$ sur $]-\infty; -\sqrt{2}[$ et sur $]\sqrt{2}; +\infty[$

$f'(x) < 0$ sur $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$

$f'(x)$ s'annule en $-\sqrt{2}$ et en $\sqrt{2}$.

Donc, f est strictement décroissante sur $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$ et est strictement croissante sur $]-\infty; -\sqrt{2}[$ et sur $]\sqrt{2}; +\infty[$.

b) g est définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Pour tout réel non nul, $g'(x) = -\frac{1}{x^2} e^x + \frac{1}{x} e^x = \frac{x-1}{x^2} e^x$. Or, pour tout réel non nul, $e^x > 0$ et $x^2 > 0$.

$g'(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$; $g'(x) < 0$ sur $]-\infty; 1[$; $g'(x)$ s'annule en 1.

Donc, g est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$ et est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

c) $h(x) = \frac{e^x-1}{2e^x+1}$ h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $h'(x) = \frac{e^x(2e^x+1)-2e^x(e^x-1)}{(2e^x+1)^2} = \frac{e^x+1}{(2e^x+1)^2} > 0$. h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

d) $k(x) = e^{-2x+1}$ k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. k est une fonction composée.

Pour tout réel x, $k'(x) = -2e^{-2x+1} < 0$. h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

e) $m(x) = xe^{2x^2-3}$ m est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $m'(x) = 1 \times e^{2x^2-3} + x \times 4xe^{2x^2-3} = (1+4x)e^{2x^2-3}$

Pour tout réel x, $e^{2x^2-3} > 0$, donc $m'(x) > 0$ sur $\left]-\frac{1}{4}; +\infty\right[$; $m'(x) < 0$ sur $\left]-\infty; -\frac{1}{4}\right[$; $m'(x)$ s'annule en $-\frac{1}{4}$.

Donc, m est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{4}\right[$ et est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{4}; +\infty\right[$.

Exercice 12 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2e^x-3}{e^x+1}$. Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $-3 < f(x) < 2$.
Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 2.

Pour tout réel x, $f'(x) = \frac{2e^x(e^x+1)-e^x(2e^x-3)}{(e^x+1)^2} = \frac{5e^x(e^x+1)}{(e^x+1)^2} = \frac{5e^x}{e^x+1}$

Pour tout réel x, $5e^x > 0$ et $e^x + 1 > 0$ et $(e^x+1)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, 1 < e^x + 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{e^x+1} < 1$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{-3}{e^x+1} > -3$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{2e^x-3}{e^x+1} > -3$ (car $2e^x > 0$)

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - 2 = \frac{2e^x-3}{e^x+1} - 2 = \frac{2e^x-3-2e^x-2}{e^x+1} = \frac{-5}{e^x+1} < 0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 2$.

$f(2) = \frac{2e^2-3}{e^2+1}$ et $f'(2) = \frac{5e^2}{e^2+1}$

T : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

T : $y = \frac{5e^2}{e^2+1}(x-2) + \frac{2e^2-3}{e^2+1}$

T : $y = \frac{1}{e^2+1}(5e^2x - 10e^2 + 2e^2 - 3)$

T : $y = \frac{1}{e^2+1}(5e^2x - 8e^2 - 3)$

Exercice 13 :

1) Déterminer la nature de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = e^{3n}$. Indiquer sa raison et son premier terme.
2) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = e^n$.
   a. Montrer que (v_n) est géométrique.
   b. Calculer la somme : $S = v_0 + v_1 + \cdots .. + v_{50}$

1) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{3(n+1)} = e^3 e^{3n} = e^3 u_n$ donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison e^3 et de 1er terme $u_0 = e^0 = 1$.

2)$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = e^{(n+1)} = ee^n = ev_n$ donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison e et de 1er terme $v_0 = e^0 = 1$.

$$S = v_0\left(\frac{1-q^{50+1}}{1-q}\right) = \frac{1-e^{51}}{1-e}$$

Exercice 14 :

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000℃. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit. On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint. La température du four est exprimée en degré Celsius (˚C).
La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inferieure à 70˚C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.
On note *t* le temps, **en heure**, écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.
La température du four (en degré Celsius) à l'instant *t* est donnée par la fonction *f* définie, pour tout nombre réel *t* positif, par : $f(t) = ae^{-\frac{t}{5}} + b$ où a et b sont deux nombres réels.
On admet que *f* vérifie la relation suivante : $f'(t) + \frac{1}{5}f(t) = 4$

1) Déterminer les valeurs de *a* et *b* sachant qu'initialement, la température du four est de 1000℃.
2) Étudier les variations de *f* sur [0 ; +∞[. En déduire son tableau de variations.
3) Avec ce modèle, après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

Corrigé :
f est définie et dérivable sur [0 ; +∞[.

1) $f'(t) + \frac{1}{5}f(t) = 4 \iff -\frac{a}{5}e^{-\frac{t}{5}} + \frac{a}{5}e^{-\frac{t}{5}} + \frac{b}{5} = 4 \iff \frac{b}{5} = 4 \iff b = 20.$

La fonction f est alors de la forme : $f(t) = ae^{-\frac{t}{5}} + 20.$

$f(0) = 1\,000 \iff a + 20 = 1000 \iff a = 980.$

Conclusion : $f(t) = 980e^{-\frac{t}{5}} + 20.$

b) $f'(x) = -\frac{980}{5}e^{-\frac{x}{5}} = -196\,e^{-\frac{x}{5}}$, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) < 0.$

La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ ce qui est cohérent avec le refroidissement du four.

t	0	t_{70}	$+\infty$
$f'(t)$		+	
$f(t)$	1000	70	20

Pour utiliser l'algorithme de dichotomie avec la calculatrice, comme ce programme résout $f(x) = 0$, il faut entrer ici comme fonction
$g(x) = f(x) - 70 = 980\,e^{-\frac{x}{5}} + 20 - 70 = 980\,e^{-\frac{x}{5}} - 50$

On trouve alors : $14,877 < t_{70} < 14,878$ après 50 itérations.

Transformons le résultat en heures, minutes :
$14,877 \times 60 < 892' \approx 14\text{ h }52'$ et $14,878 > 14\text{ h }53'$

On peut ouvrir les porte du four après 14 h 53'.

Exercice 15 :

Calculer les 3 premières valeurs et conjecturer à l'aide d'une calculatrice, le sens de variation de la suite.

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -n^2 + 3n - 5$

b) $\begin{cases} u_0 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}{u_n}^2 - 7 \end{cases}$

Les suites sont-elles arithmétiques ? géométriques ? justifier

a) $u_0 = -5$ $u_1 = -3$ $u_2 = -3$ $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ *et* $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ *La* suite est ni arithmétique ni géométrique.

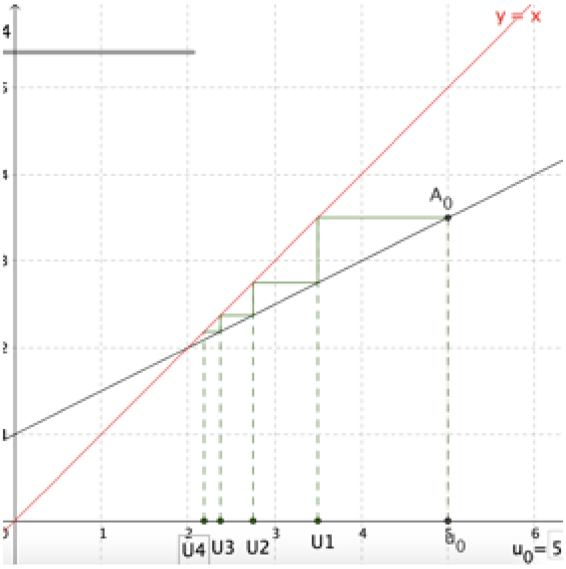
b) $u_0 = -3$ $u_1 = -2{,}5$ $u_2 = -3{,}875$ suite ni arithmétique ni géométrique

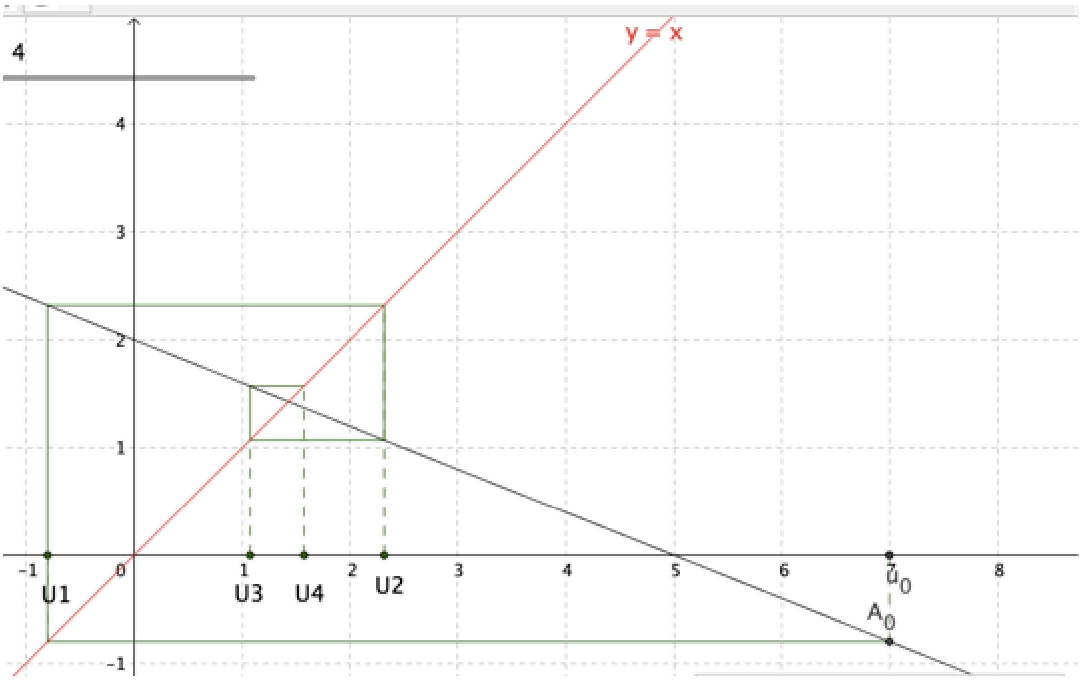
Exercice 16 :

Représenter graphiquement les 4 premiers termes de la suite (u_n).

a) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_0 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{2}{5}u_n + 2 \end{cases}$





Exercice 17 :

Dans chaque cas, exprimer le terme u_{n+1} en fonction de n, puis en fonction de u_n. Préciser alors la nature des suites.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n - 5$ $\quad$ $b)$ $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{4-7n}{5}$ $\quad$ $c)$ $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{4^n}{3^{2n}}$

$a)\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3(n+1) - 5 = 3n - 2$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 3n - 2 - 3n + 5 = 3$

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -5$

$b)\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{4 - 7(n+1)}{5} = \dfrac{4 - 7n}{5} - \dfrac{7}{5} = u_n - \dfrac{7}{5}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -\dfrac{7}{5}$

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{7}{5}$ et de premier terme $u_0 = \frac{4}{5}$

$c)\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{4^{n+1}}{3^{2n+2}} = \dfrac{4 \times 4^n}{3^2 \times 3^{2n}} = \dfrac{4}{9} \times \dfrac{4^n}{3^{2n}}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{4}{9} u_n$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{9}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

Exercice 18 :

(u_n) est une suite arithmétique telle que $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_{10} + u_{11} = 40 \end{cases}$

1) Calculer le 1er terme u_0 et la raison r.
2) Calculer alors $S = u_0 + u_1 + \cdots . + u_{30}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$$

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_{10} + u_{11} = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + r + u_0 + 2r + u_0 + 3r = 9 \\ u_0 + 10r + u_0 + 11r = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_0 + 6r = 9 \\ 2u_0 + 21r = 40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6u_0 + 12r = 18 \\ 6u_0 + 63r = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 51r = 102 \\ 3u_0 + 6r = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 51r = 102 \\ 6u_0 + 12r = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -1 + 2n$$

S est la somme des 31 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 2 et de 1er terme -1.

$$S = 31 \times \frac{-1 - 1 + 2 \times 30}{2} = 899$$

Exercice 19 :

Étudier le sens de variation des suites numériques (u_n) définies ci-dessous :

a) $u_n = n^2 - 5n + 1$ $\quad$ $b)$ $u_n = n + \frac{1}{n+1}$ $\quad$ $c)$ $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^{2n}}$

a) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 5x + 1$

Pour tout x positif, $f'(x) = 2x - 5$. f est donc strictement décroissante sur $\left[0; \frac{5}{2}\right]$ et strictement croissante $\left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$.

Donc, (u_n) est strictement croissante sur $\left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left[0; \frac{5}{2}\right]$.

b)Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x+\frac{1}{x+1}$

Pour tout x positif, $f'(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\geq 0$

Donc f est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
Donc, (u_n) est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

$c)\quad u_n=\frac{2^{n+1}}{3^{2n}}$

tous les termes de la suite sont strictement positifs

Comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{2^{n+2}}{3^{2n+2}}}{\frac{2^{n+1}}{3^{2n}}}=\frac{2^{n+2}}{3^{2n+2}}\times\frac{3^{2n}}{2^{n+1}}=\frac{2}{9}<1$ donc (u_n) est décroissante

Exercice 20 :

Calculer les sommes :

a) $S=10+12+14+\cdots.+80$ $\quad$ $b)$ $S=1+4+7+\cdots+364$ $\quad$ $c)$ $S=\frac{3^4}{5}+\frac{3^5}{5}+\cdots+\frac{3^{12}}{5}$

a) $S=10+12+14+\cdots.+80$

S est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 2 (nombres pairs) et de 1er terme 0.

$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=2+u_n$ avec $u_0=0$.
$u_n=10=0+2n\Leftrightarrow n=5$ donc 10 est le 6e terme de la suite.
$u_n=80=0+2n\Leftrightarrow n=40$ donc 80 est le 41e terme de la suite.

$$S=(41-6+1)\times\frac{u_5+u_{40}}{2}=36\times\frac{10+80}{2}=1620$$

b) $S=1+4+7+\cdots+364=22265$

S est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 3 et de 1er terme 1.

$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=3+u_n$ avec $u_0=1$.
$u_n=364=1+3n\Leftrightarrow n=121$ donc 364 est le 122e terme de la suite.

$$S=122\times\frac{1+364}{2}=22\,265$$

c) $S=\frac{3^4}{5}+\frac{3^5}{5}+\cdots+\frac{3^{12}}{5}$

S est la somme des termes d'une suite géométique de raison 3 et de 1er terme $\frac{3^4}{5}$.

$$u_0=\frac{3^4}{5}\quad u_1=3^1\times\frac{3^4}{5}=\frac{3^5}{5}\quad et\ \ u_8=3^8\times\frac{3^4}{5}=\frac{3^{12}}{5}$$

$$\boldsymbol{S_n=1er\ terme\ \times\frac{1-q^{nbre\ de\ termes}}{1-q}}$$

$$S=\frac{3^4}{5}\times\frac{\mathbf{1}-3^{\mathbf{8+1}}}{\mathbf{1-3}}=-\frac{81}{10}(1-3^9)=159424{,}2$$

Exercice 21 :

(u_n) est une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n} \end{cases}$

a) On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n+1}{u_n}$. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.

b) En déduire l'expression de (v_n) puis de (u_n) en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}} - \frac{u_n+1}{u_n} = \frac{\frac{u_n}{1-u_n}+1}{\frac{u_n}{1-u_n}} - \frac{u_n+1}{u_n} = \frac{\frac{1}{1-u_n}}{\frac{u_n}{1-u_n}} - \frac{u_n+1}{u_n} = \frac{1}{u_n} - \frac{u_n+1}{u_n} = -\frac{u_n}{u_n} = -1.$

(v_n) est une suite arithmétique de raison -1 et de premier terme $v_0 = \frac{u_0+1}{u_0} = \frac{1}{2}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{2} - n$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2} - n = \frac{u_n+1}{u_n} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2}u_n - nu_n = u_n + 1 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n\left(\frac{1}{2} - n - 1\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = -\frac{1}{\frac{1}{2}+n} = -\frac{2}{1+2n}$$

Exercice 22 :

Une balle est lâchée d'une hauteur de 3 m au-dessus du sol. Elle touche le sol et rebondit. A chaque rebond, elle perd 25% de sa hauteur précédente. On modélise la hauteur de la balle par une suite (h_n) où h_n désigne la hauteur maximale de la balle, en mètres, après le n-ième rebond.

a) Calculer h_0, h_1, h_2

b) Donner, en justifiant, la nature de (h_n) et préciser ses éléments caractéristiques.

c) Donner la hauteur, arrondie au cm, de la balle après 6 rebonds.

d) La fonction « seuil » est définie en Python. Compléter cet algorithme pour que cette fonction renvoie le nombre de rebonds à partir duquel la hauteur maximale de la balle sera inférieure ou égale à 10 cm.

```
def seuil():
    h=3
    n=0
    while .......:
        h = ......
        n=n+1
    return n
```

Corrigé :

1) $h_1 = 3 - 0.25 \times 3 = 2,25$ et $h_2 = 2,25 - 0,25 \times 2,25 = 1,6875$.

2) $h_1 - h_0 = 0,75$ et $h_2 - h_1 = 0,5625$ donc $h_1 - h_0 \neq h_2 - h_1$.
La suite (h_n) n'est pas arithmétique.

3) Exprimons h_{n+1} en fonction de h_n : $h_{n+1} = h_n - 0,25h_n = 0,75h_n$.
La suite (h_n) est géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $h_0 = 3$.

4) $h_6 = h_0 q^6 = 3 \times 0,75^6 \approx 0,534$.
La hauteur de la balle après 6 rebonds est de 53 cm.

5) On obtient l'algorithme suivant :

```
def seuil():
    h=3
    n=0
    while h>0.1:
        h=h*0.75
        n=n+1
    return n
```

Le programme renvoie 12

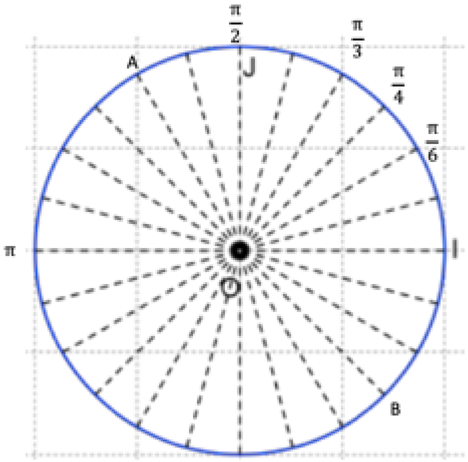
vérification : $u_{11} \approx 0,126$ et $u_{12} \approx 0,095$

Exercice 23:

Placer sur le cercle trigonométrique les points images des réels $\frac{-22\pi}{3}$ et $\frac{47\pi}{4}$. Indiquer leur cosinus et leur sinus.

$\frac{-22\pi}{3} = \frac{-24\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = -8\pi + \frac{2\pi}{3}$ On place le point image en A associé au réel $\frac{2\pi}{3}$.

$\frac{47\pi}{4} = \frac{48\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 12\pi - \frac{\pi}{4}$. On place le point image en B associé au réel $-\frac{\pi}{4}$.



.

$$\cos\left(\frac{-22\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{-22\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 24: Simplifier l'expression suivante :

$$A(x) = \cos(3\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(6\pi - x)$$

$$A(x) = \cos(\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(-x)$$

$$A(x) = -\cos(x) + \cos(x) - \sin(x) - \sin(x) = -2\sin(x)$$

Exercice 25:

Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation (E) : $2sin^2(x) = 1$ et l'inéquation : (I) : $2\cos(x) > \sqrt{2}$

(E) $\Leftrightarrow sin(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

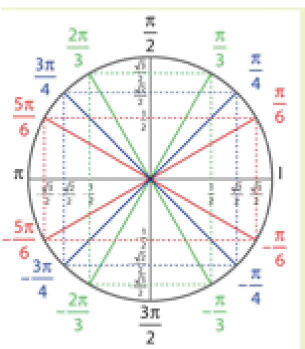
(E) $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Or $x \in [0; 2\pi[$ donc $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$

(I) : $2\cos(x) > \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$

On trace la droite d'équation $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et on relève les points du cercle situés au-dessus de cette droite.

Sur$[0; 2\pi[$, (I) admet donc pour solutions $\left]0; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right[$.



Partie 6 – Géométrie

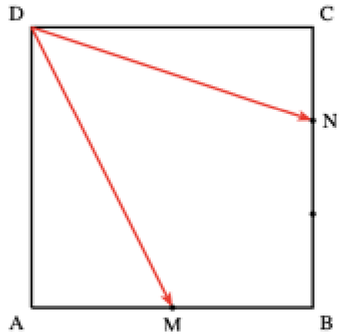
Exercice 26 :

Soit ABCD un carré de côté 1. Soit M un point de [AB] tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et N un point de $[BC]$ tel que $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

1) Faire une figure
2) En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DN}$ de deux manières différentes déterminer la mesure exacte de l'angle $\widehat{MDN}$. On pourra introduire le repère (A, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$).

Corrigé :

1) Voir ci-contre.



2) $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

$\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN} = DM \times DN \cos(\widehat{MDN})$

$DM = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$DN = \sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

$$\cos(\widehat{MDN}) = \frac{\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}}{DM \times DN} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{3}} = \frac{5}{6} \times \frac{6}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{MDN} = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 27 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}$). Soient $A(-1; 4), B(2; 2) et\ C(1; 5)$. Déterminer une mesure arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\widehat{BAC}$$

$\cos\widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$

$\overrightarrow{AB}(3; -2)$ et $\overrightarrow{AC}(2; 1)$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6 - 2 = 4$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$ $\quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ $\quad$ donc $\cos\widehat{BAC} = \frac{4}{\sqrt{13}\times\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$

$$\widehat{BAC} \approx 60°$$

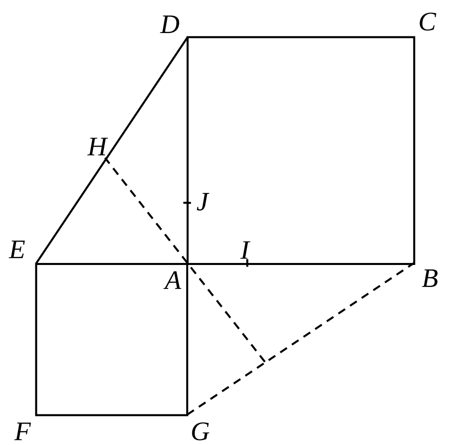
Exercice 28 :

ABCD est un carré de côté *a*.

AEFG est un carré de côté *b*, tel que $A \in [DG]$ et $A \in [BE]$.

Le point *H* est le milieu du segment $[DE]$.

Le but de l'exercice est de prouver que les droites (AH) et (BG) sont perpendiculaires par deux méthodes.



1) ***sans utiliser les coordonnées :***

a) Montrer que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AH}$

b) Calculer en le développant, le produit scalaire :

$$\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}\right)$$

c) En déduire que (AH) et (BG) sont perpendiculaires.

2)à l'aide des coordonnées :

On a placé sur le schéma les points *I* et *J* tels que $AI = 1$ et $AJ = 1$; on considère alors le repère $(A; I, J)$.

a) Déterminer en fonction de *a* et *b*, les coordonnées des points *E*, *D*, *B* et *G*.

b) Montrer (AH) et (BG) sont perpendiculaires.

1) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HE}$

Or *H* est le milieu du segment $[DE]$ donc $\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HE} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AH}$

$$(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}).(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}) = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG}$$

Or (AD) et (BA) sont perpendiculaires donc $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BA} = 0$

$\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AG} = -ab$

$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BA} = ab$

(AE) et (AG) sont perpendiculaires donc $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AG} = 0$

Donc $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}).(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}) = -ab + ab = 0$

Donc $2\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BG} = 0$

Donc (AH) et (BG) sont perpendiculaires.

2) $E(-b; 0)$ $\quad D(0; a)$ $\quad B(a; 0)$ $\quad G(0; -b)$ $\quad H(\frac{-b}{2}; \frac{a}{2})$

$\overrightarrow{AH}(\frac{-b}{2}; \frac{a}{2})$ $\quad \overrightarrow{BG}(-a; -b)$

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BG} = \frac{ab}{2} - \frac{ab}{2} = 0$$

Donc (AH) et (BG) sont perpendiculaires.

<u>Exercice 29 :</u>

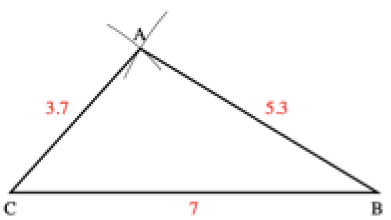
Soit le triangle ABC tel que BC = 7 cm, AC = 3,7 cm et AB=5,3 cm.

Calculer la valeur exacte de $cos\widehat{BAC}$ puis donner une valeur approcher de $\widehat{BAC}$ à 0,1° près.

Calculer la valeur exacte de $cos\widehat{ABC}$ puis donner une valeur approcher de $\widehat{ABC}$ à 0,1° près.

<u>Corrigé :</u>

1) On obtient la figure suivante :



2) D'après la relation d'Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{BAC}$ $\Leftrightarrow$

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3,7^2 + 5,3^2 - 7^2}{2 \times 5,3 \times 3,7} = -\frac{361}{1261} \approx -0,184.$$

$$\widehat{BAC} = \arccos\left(-\frac{361}{1261}\right) \approx 100,6°.$$

3) Par une permutation circulaire,

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{5,3^2 + 7^2 - 3,7^2}{2 \times 5,3 \times 7} = \frac{317}{371} \approx 0,854.$$

$$\widehat{ABC} = \arccos\left(\frac{317}{371}\right) \approx 31,3°.$$

Exercice 30 :

1) Soit A et B deux points du plan tels que AB=6 cm et I le milieu de $[AB]$.

Déterminer l'ensemble (E_1) des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 12$ (aide : étudier d'abord le cas où M appartient à la droite (AB) puis en déduire les autres cas).

Déterminer l'ensemble (E_2) des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = -5$

Montrer que $MA^2 + MB^2 = 26$ équivaut à $MI^2 = 4$. En déduire l'ensemble (E_3) des points M.

2) Soit le triangle ABC et I le milieu de $[BC]$. Déterminer l'ensemble (E_4) des points M tels que : $\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$.

- $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 12$

Soit K le projeté orthogonal de M sur (AB).

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KM}.\overrightarrow{AB}$$

Or (AB) et (KM) sont perpendiculaires donc $\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{AB} = 0$

Donc : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AB} = 12 > 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens.

$\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AB} = AK \times AB = 6AK = 12$ donc $AK = 2$ et AB = 6 donc $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

(E_1) est donc l'ensemble des points de la droite perpendiculaire à (AB) passant par K.

- $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = -5$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

Donc $M \in (E_2) \iff MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = -5$

$M \in (E_2) \iff MI^2 - \frac{36}{4} = -5$

$M \in (E_2) \iff MI^2 = 4$

$M \in (E_2) \iff MI = 2$ (car $MI \geq 0$)

Donc (E_2) *est le cercle* de centre I de rayon 2.

- $MA^2 + MB^2 = 26 \iff \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = 26 \iff \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = 26$

$$\iff MI^2 + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + AI^2 + MI^2 + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + BI^2 = 26$$

$$\iff 2MI^2 + \overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + AI^2 + BI^2 = 26$$

$$or\ \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

$$MA^2 + MB^2 = 26 \iff 2MI^2 + 9 + 9 = 26$$

$$MA^2 + MB^2 = 26 \iff 2MI^2 = 8$$

$$MA^2 + MB^2 = 26 \iff MI^2 = 4$$

$M \in (E_3) \iff MI = 2$ (car $MI \geq 0$)

Donc (E_3)*est le cercle* de centre I de rayon 2.

2) $\overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$

$$\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})$$

$$\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{MA}.(2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})$$

Or I est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$M \in (E_4) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$
$M \in (E_4) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI} = 0$
(E_4) est donc *le cercle* de diamètre $[AI]$.

Exercice 31 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soient $A(3;4), B(1;-1)$ *et* $C(6;-2)$.

1) Déterminer une équation cartésienne de (AB).
2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point C et parallèle à la droite (AB).
3) Déterminer une équation cartésienne de la droite (d') passant par le point A et perpendiculaire à la droite (BC).
4) Déterminer une équation cartésienne du cercle C_1 de diamètre $[BA]$.
5) Déterminer une équation de la tangente T au cercle C_1 en B.

1)$M(x\,;y) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ colinéaires
$\overrightarrow{AB}(-2;-5)$ et $\overrightarrow{AM}(x-3; y-4)$
$M(x\,;y) \in (AB) \Leftrightarrow -2(y-4) + 5(x-3) = 0$
$M(x\,;y) \in (AB) \Leftrightarrow 5x - 2y - 7 = 0$
(AB) : $5x - 2y - 7 = 0$

2)L'équation réduite de la droite (AB) est : $y = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$

L'équation réduite de la droite (d) passant par le point C est : $y = \frac{5}{2}x + p$

$$C \in (d) \Leftrightarrow -2 = \frac{30}{2} + p$$
$$C \in (d) \Leftrightarrow p = -17$$

L'équation réduite de la droite (d) passant par le point C est : $y = \frac{5}{2}x - 17$

Une équation cartésienne de (d) est : $5x - 2y - 34 = 0$

3) $\overrightarrow{BC}(5;-1)$

$\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal à la droite (d').
Une équation cartésienne de la droite (d') est : $5x - y + c = 0$
$A \in (d') \Leftrightarrow 15 - 4 + c = 0$
$A \in (d') \Leftrightarrow c = -11$
Une équation cartésienne de la droite (d') est : $5x - y - 11 = 0$

4) Soit $M(x\,;y)$ un point quelconque du plan, alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$.

M ∊ $C_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0.$
$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) + (y+1)(y-4) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x - x + 3 + y^2 - 4y + y - 4 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 3y - 1 = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 1 = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{29}{4} = 0$

M ∊ $C_1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{29}{4}$

5) M ∊ T∩ $C_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM} = 0$

$\overrightarrow{AB}(-2;-5)$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$

M ∊ T∩ $C_1 \Leftrightarrow -2(x-1) - 5(y+1) = 0$

M ∊ T∩ $C_1 \Leftrightarrow -2x - 5y - 3 = 0$

T : $-2x - 5y - 3 = 0$

Exercice 32 :

1) On considère l'équation $x^2 + y^2 - x - 3y - 5 = 0$.

Cette équation est-elle celle d'un cercle ? Si oui, en préciser le centre et le rayon.

$$x^2 + y^2 - x - 3y - 5 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 5$$

$$x^2 + y^2 - x - 3y - 5 = (x - \frac{1}{2})^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{30}{4}$$

$x^2 + y^2 - x - 3y - 5 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{15}{2}$

Il s'agit de l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2})$ et de rayon $\sqrt{\frac{15}{2}}$.

2) On considère l'équation $(E): x^2 - 2ax + y^2 + 4y + 8 = 0$

Pour quelles valeurs de a cette équation est-elle celle d'un cercle ? Préciser alors son centre et son rayon.

$$x^2 - 2ax + y^2 + 4y + 8 = (x - a)^2 - a^2 + (y - 2)^2 - 4 + 8$$

$$x^2 - 2ax + y^2 + 4y + 8 = (x - a)^2 + (y - 2)^2 + 4 - a^2$$

$x^2 - 2ax + y^2 + 4y + 8 = 0 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - 2)^2 = a^2 - 4$

Il s'agit de l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(a ; 2)$ et de rayon $\sqrt{a^2 - 4}$ si et seulement si $a^2 - 4 > 0$ donc si et seulement si $a \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.

Partie 7 – Probabilités

Exercice 33:

Deux urnes contiennent chacune 5 boules. L'urne n°1 contient 2 boules blanches et 3 boules noires. L'urne n°2 contient une boule blanche et 4 boules noires. On lance un dé équilibré à 6 faces notées de 1 à 6. Si le dé est 6 on tire une boule dans l'urne n°1, sinon on tire une boule dans l'urne n°2. On gagne lorsque l'on obtient une boule blanche.

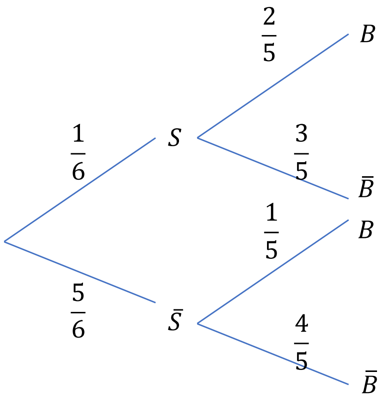
On note les évènements :

« S » : le résultat du dé est un 6,

« B » : on tire une boule blanche.

1) Donner sous forme de fraction irréductible les probabilités suivantes : $\mathrm{p}(S)$, $\mathrm{p}(\bar{S})$, $p_S(B)$, $p_{\bar{S}}(\bar{B})$
2) Construire un arbre pondéré décrivant le jeu.
3) Montrer que la probabilité de gagner à ce jeu est égale à $\frac{7}{30}$.
4) Un joueur a gagné. Quelle est la probabilité que la boule provienne de l'urne n°1 ?
5) Les événement B et S sont-ils indépendants ?

1) $\mathrm{p}(S) = \frac{1}{6}$ $\quad$ $\mathrm{p}(\bar{S}) = \frac{5}{6}$ $\quad$ $p_S(B) = \frac{2}{30}$ $\quad$ $p_{\bar{S}}(\bar{B}) = \frac{20}{30}$



3)D'après la formule des probabilités totales, on a : $\mathrm{p}(B) = \mathrm{p}(B \cap S) + p(B \cap \bar{S}) = \frac{2}{30} + \frac{5}{30}$

$$\mathrm{p}(B) = \frac{7}{30}$$

4)L'urne 1 correspond à l'événement S.

$$p_B(S) = \frac{\mathrm{p}(B \cap S)}{p(B)} = \frac{\frac{2}{30}}{\frac{7}{30}} = \frac{2}{7}$$

5) Deux événements B et S sont dits indépendants si et seulement si $\mathrm{p}(S \cap B) = \mathrm{p}(S) \times \mathrm{p}(B)$

$$\mathrm{p}(S \cap B) = \frac{2}{30}$$

$\mathrm{p}(S) \times \mathrm{p}(B) = \frac{1}{6} \times \frac{7}{30} = \frac{7}{180}$

Donc

$\mathrm{p}(S \cap B) \neq \mathrm{p}(S) \times \mathrm{p}(B)$ et donc B et S ne sont pas indépendants.

<u>Exercice 34 :</u>

On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous. On sait que : $E(X) = 1{,}4$. Calculer a et b. En déduire la variance et l'écart-type.

x_i	-5	-2	8
$p(X = x_i)$	$0{,}2$	a	b

$p(X = -5) + p(X = -2) + p(X = 8) = 0{,}2 + a + b = 1$

$E(X) = 0{,}2 \times (-5) + a \times (-2) + b \times 8 = 1{,}4$ soit $-1 - 2a + +8b = 1{,}4$

On résout le système : (S): $\begin{cases} a + b = 0{,}8 \\ -2a + 8b = 2{,}4 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 1{,}6 \\ -2a + 8b = 2{,}4 \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 10b = 4 \\ -2a + 8b = 2{,}4 \end{cases}$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0{,}4 \\ a = 0{,}4 \end{cases}$$

x_i	-5	-2	8
$p(X = x_i)$	$0{,}2$	$0{,}4$	$0{,}4$

$V(X) = 0{,}2 \times (-5 - 1{,}4)^2 + 0{,}4 \times (-2 - 1{,}4)^2 + 0{,}4 \times (8 - 1{,}4)^2$

$V(X) = 0{,}2 \times (-5 - 1{,}4)^2 + 0{,}4 \times (-2 - 1{,}4)^2 + 0{,}4 \times (8 - 1{,}4)^2$

$$V(X) = 30{,}24$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 5{,}5$$

Exercice 35 :
Après avoir misé 2€, on lance deux dés équilibrés. Si la somme des résultats obtenus est supérieure ou égale à 10, on gagne 10€, sinon on ne gagne rien.
Soit G la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur en €. Déterminer la loi de probabilité de G. calculer $E(G)$ et interpréter le résultat obtenu.

Le tableau comptabilise la somme des résultats obtenus à chaque expérience aléatoire :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Appelons S l'événement : le résultat obtenu est supérieur ou égale à 10.
$p(S) = \frac{5}{36} = \frac{1}{6}$ et $p(\bar{S}) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

Les différentes valeurs prises par la variable aléatoire G sont : 8 et -2.
Calculons la probabilité prise par chaque valeur :
$p(G = 8) = \frac{1}{6}$ $\qquad$ $p(G = -2) = \frac{5}{6}$

La loi de probabilité de G est donc :

x_i	-2	8
$p(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(X) = \frac{5}{6} \times (-2) + \frac{1}{6} \times 8 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$
$E(X) < 0$ donc ce jeu est défavorable au joueur.

Exercice 36:
Un tireur participe à un concours de tir à l'arc et atteint sa cible neuf fois sur dix. Il tire 5 flèches sur la cible. Pour chaque flèche, s'il atteint la cible, il gagne 10 euros sinon il perd 20 euros. On suppose que les tirs sont indépendants.

1) Quelle est la probabilité d'atteindre au moins deux fois la cible ?
2) On appelle Y la variable aléatoire égale au gain du joueur à l'issue des 5 tires.
    a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?
    b) Donner la loi de probabilité de Y
    c) Quel est le gain moyen du tireur ? Est-ce intéressant pour lui ? Justifier.
    d) Calculer la variance et l'écart-type .

1)Notons S l'événement « le tireur atteint sa cible » et S_2 le tireur atteint au moins deux fois sa cible.

La probabilité de perdre 5 fois de suite est de $\left(\frac{1}{10}\right)^5$.

Il y a 5 chemin possibles conduisant le tireur à ne gagner qu'une fois ($\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}S$; $\bar{S}\bar{S}\bar{S}S\bar{S}$; $\bar{S}\bar{S}S\bar{S}\bar{S}$; $\bar{S}S\bar{S}\bar{S}\bar{S}$; $S\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}$), correspondant à une probabilité de$\left(\frac{1}{10}\right)^4 \times \frac{9}{10}$.

Donc $p(S2) = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^5 - 5 \times \left(\frac{1}{10}\right)^4 \times \frac{9}{10} = \frac{99\,954}{100\,000}$

Les valeurs prises par Y sont 50 (5 gains successifs), 20 (4 gains et un échec), -10 (3 gains et 2 échecs), -40 (2 gains et 3 échecs), -70 (1 gain et 4 échecs) et -100 (5 échecs).

La loi de probabilité de G est donc :

x_i	50	20	-10	-40	-70	-100
$p(X = x_i)$	$\left(\frac{9}{10}\right)^5$	$5 \times \left(\frac{9}{10}\right)^4 \times \frac{1}{10}$	$10 \times \left(\frac{9}{10}\right)^3 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2$	$10 \times \left(\frac{9}{10}\right)^2 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3$	$5 \times \left(\frac{1}{10}\right)^4 \times \frac{9}{10}$	$\left(\frac{1}{10}\right)^5$

x_i	50	20	-10	-40	-70	-100
$p(X = x_i)$	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001

$$E(X) = 50 \times 0{,}59049 + 20 \times 0{,}32805 - 10 \times 0{,}0729 - 40 \times 0{,}0081 - 70 \times 0{,}0045 - 100 \times 0{,}00001$$

$$E(X) \approx 35{,}7$$

$E(X) > 0$ donc ce jeu est favorable au joueur.

$$V(X) \approx 405$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 20{,}1$$

<u>Exercice 37:</u>

Un restaurateur propose deux formules au déjeuner : le menu express à 12€ et le menu du jour à 15€. La bière est en supplément à 2€. 60% des clients choisissent le menu express et 70 % prennent une bière. De plus 40% des clients choisissant le menu du jour prennent une bière.

1) Compléter le tableau ci-dessous :

	Bière en supplément	Pas de bière	Total
Menu express	30	30	60
Menu du jour	40	0	40
Total	70	30	100

On choisit au hasard un client de ce restaurant et on note D la variable aléatoire représentant sa dépense en €.

2) Déterminer la loi de probabilité de D.
3) Calculer l'espérance de D et interpréter le résultat obtenu.
4) Le restaurateur fait 200 repas par déjeuner. Quelle recette peut-il espérer ?

Les valeurs prises par D sont 12 (menu express), 15 (menu du jour), 17 (Menu du jour avec bière), 14 (Menu express avec bière).

La loi de probabilité de G est donc :

x_i	12	14	15	17
$p(X = x_i)$	0,3	0,3	0	0,4

$$E(X) = 12 \times 0{,}3 + 14 \times 0{,}3 + 15 \times 0 + 17 \times 0{,}4$$

$$E(X) = 14{,}6$$

L'espérance de gain du restaurateur est donc de 14,6€. Avec 200 repas, il peut espérer avoir une recette R de 2920€.

$$R = 14{,}6 \times 200 = 2920€$$