

Entrée en terminale – Spécialité maths

Les exercices qui suivent font appel à des notions essentielles du cours de 1^e qu'il est important de bien maîtriser en entrant en terminale. Il est conseillé de reprendre le **cours** avant de les traiter en faisant des fiches sur certains chapitres (formules de dérivées,). Les différentes parties sont classées par ordre de travail (à répartir pendant les vacances, au minimum à partir du 15 août). Refaites les contrôles communs et travaillez le Python.

Partie 1 – Polynôme du second degré

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 10x + 5$

- Déterminer la forme canonique de f .
- En déduire l'extremum (maximum ou minimum) de f et la valeur de x pour lequel il est atteint.
- Mêmes questions avec $g(x) = -2x^2 + 8x - 13$

Exercice 2 :

Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes puis donner leur tableau de variation :

- $f(x) = 2x^2 - 12x + 3$
- $f(x) = -3(x + 1)^2 - 5$
- $f(x) = x(x - 8)$

Exercice 3 :

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

- $(E_1) : 6x^2 - 7x - 3 = 0$
- $(E_2) : x^2 - 19x - 216 = 0$
- $(E_3) : x^4 - x^2 - 2 = 0$
- $(I_1) : 8x^2 - 2x - 3 < 0$
- $(I_2) : \frac{x^2 - x - 20}{3x^2 - 20x - 7} \geq 0$

Exercice 4 :

m est un réel fixé différent de $\frac{3}{2}$. P_m est un polynôme défini par $P_m(x) = (2m - 3)x^2 - 2mx - 1$.

- Calculer le discriminant du polynôme P_m .
- Pour quelles valeurs de m l'équation $P_m(x) = 0$ n'admet-elle qu'une solution ?
- Pour quelles valeurs de m l'équation $P_m(x) = 0$ n'admet-elle aucune solution dans \mathbb{R} ?
- Pour quelles valeurs de m a-t-on $P_m(x) > 0$ pour tout réel x ?

Partie 2 – Dérivation

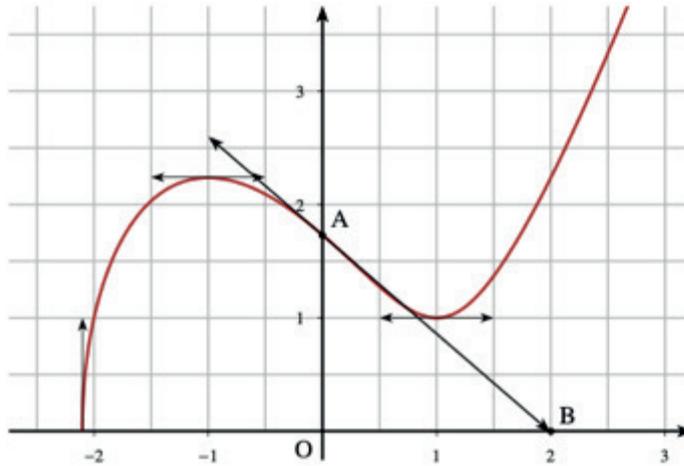
Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ et un réel h non nul. On désigne par C_f sa courbe représentative.

- Vérifier que $f(-3 + h) = 3h^2 - 20h + 34$
- En déduire que le taux de variation de f entre -3 et $-3 + h$ est $\tau(x) = 3h - 20$
- La fonction est-elle dérivable en -3 ? Si oui, préciser le nombre dérivé.
- Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse -3 .

Exercice 6 :

Soit la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2, 1 ; +\infty[$.
La tangente à \mathcal{C}_f en $A(1, 73 ; 0)$ passe par le point $B(2 ; 0)$.



Par lecture graphique, compléter le tableau suivant :

x	-1	0	1
$f(x)$			
$f'(x)$			

Exercice 7 :

Pour chacune des fonctions suivantes, écrire son domaine de définition, de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

$f_1(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$	$f_2(x) = \sqrt{x}(2x + 1)$	$f_3(x) = (2x - 3)(x^2 + 4x - 1)$
$f_4(x) = \frac{x - 5}{x + 2}$	$f_5(x) = \frac{2x + 5}{x^2 + x + 3}$	$f_6(x) = \frac{5}{x^2 - 1}$
$f_7(x) = \sqrt{2 - 3x}$	$f_8(x) = (-5x + 4)^2$	

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x - 1}$. On désigne par \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

- Calculer la dérivée de f et montrer que $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$
- Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
- Déterminer l'équation de la tangente T à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.
- Existe-t-il des tangentes à \mathcal{C}_f parallèles à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - 5$? Si oui, en quels points ?

Partie 3 – Exponentielle

Exercice 9 :

Simplifier les écritures suivantes :

$(e^x)^3 e^{-2x}$	$\frac{e^{x-1}}{e^{x+2}}$	$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x}$	$e^{-x} e^2$	$\frac{e^{3x}}{(e^{-x})^2 e^x}$	$\frac{e^x e^y}{e^{x-y}}$	$\frac{(e^{-3x})^2 e^{5x}}{e^{-x}}$

Exercice 10 :

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et inéquations suivantes :

a) $(E_1): e^{3-x} = 1$ b) $(E_2): e^{2x^2+3} = e^{7x}$ c) $(E_3): 2e^{-x} = \frac{1}{e^{x+2}}$ d) $(E_4): e^{x+1} = e^{\frac{1}{x}}$

e) $(E_5): e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ (changer de variable)

f) $(I_1): (e^x)^3 \leq e^{x-2}$ g) $(I_2): e^x > \frac{1}{e^x}$ h) $(I_3): (e^x - 1)e^x > e^x - 1$

Montrer que : $3e^{2x} + e^x - 4 = (e^x - 1)(3e^x + 4)$. En déduire le signe de $3e^{2x} + e^x - 4$ en fonction de x .

Exercice 11 :

Déterminer les dérivées puis en déduire le sens de variation des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (x^2 - 2x) e^x$ b) $g(x) = \frac{1}{x} e^x$ c) $h(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x + 1}$ d) $k(x) = e^{-2x+1}$

e) $m(x) = x e^{2x^2-3}$

Exercice 12 :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^x + 1}$. Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f .

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, -3 < f(x) < 2$.

Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 2.

Exercice 13 :

- 1) Déterminer la nature de la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = e^{3n}$. Indiquer sa raison et son premier terme.
- 2) On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par $v_n = e^n$.
 - a. Montrer que (v_n) est géométrique.
 - b. Calculer la somme : $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{50}$

Exercice 14 :

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit. On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint. La température du four est exprimée en degré Celsius (°C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70 °C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

On note t le temps, **en heure**, écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.

La température du four (en degré Celsius) à l'instant t est donnée par la fonction f définie, pour tout nombre réel t positif, par : $f(t) = ae^{\frac{1}{5}t} + b$ où a et b sont deux nombres réels.

On admet que f vérifie la relation suivante : $f'(t) + \frac{1}{5}f(t) = 4$

- 1) Déterminer les valeurs de a et b sachant qu'initialement, la température du four est de 1000 °C.
- 2) Étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$. En déduire son tableau de variations.
- 3) Avec ce modèle, après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

Partie 4 - Les suites

Exercice 15 :

Calculer les 3 premières valeurs et conjecturer à l'aide d'une calculatrice, le sens de variation de la suite.

$$\text{a) } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = -n^2 + 3n - 5 \qquad \text{b) } \begin{cases} u_0 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - 7 \end{cases}$$

Les suites sont-elles arithmétiques ? géométriques ? justifier

Exercice 16 :

Représenter graphiquement les 4 premiers termes de la suite (u_n) .

$$\text{a) } \begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} u_0 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{2}{5}u_n + 2 \end{cases}$$

Exercice 17 :

Dans chaque cas, exprimer le terme u_{n+1} en fonction de n , puis en fonction de u_n . Préciser alors la nature des suites.

$$\text{a) } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n - 5 \qquad \text{b) } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{4-7n}{5} \qquad \text{c) } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{4^n}{3^{2n}}$$

Exercice 18 :

(u_n) est une suite arithmétique telle que $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_{10} + u_{11} = 40 \end{cases}$

- 1) Calculer le 1^{er} terme u_0 et la raison r .
- 2) Calculer alors $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{30}$

Exercice 19 :

Étudier le sens de variation des suites numériques (u_n) définies ci-dessous :

$$\text{a) } u_n = n^2 - 5n + 1 \qquad \text{b) } u_n = n + \frac{1}{n+1} \qquad \text{c) } u_n = \frac{2^{n+1}}{3^{2n}}$$

Exercice 20 :

Calculer les sommes :

a) $S = 10 + 12 + 14 + \dots + 80$ b) $S = 1 + 4 + 7 + \dots + 364$ c) $S = \frac{3^4}{5} + \frac{3^5}{5} + \dots + \frac{3^{12}}{5}$

Exercice 21 :

(u_n) est une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n} \end{cases}$

- a) On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.
- b) En déduire l'expression de (v_n) puis de (u_n) en fonction de n .

Exercice 22 :

Une balle est lâchée d'une hauteur de 3 m au-dessus du sol. Elle touche le sol et rebondit. A chaque rebond, elle perd 25% de sa hauteur précédente. On modélise la hauteur de la balle par une suite (h_n) où h_n désigne la hauteur maximale de la balle, en mètres, après le n-ième rebond.

- a) Calculer h_0, h_1, h_2
- b) Donner, en justifiant, la nature de (h_n) et préciser ses éléments caractéristiques.
- c) Donner la hauteur, arrondie au cm, de la balle après 6 rebonds.
- d) La fonction « seuil » est définie en Python. Compléter cet algorithme pour que cette fonction renvoie le nombre de rebonds à partir duquel la hauteur maximale de la balle sera inférieure ou égale à 10 cm.

```
def seuil():
    h=3
    n=0
    while .....:
        h = .....
        n=n+1
    return n
```

Partie 5 – Trigonométrie

Exercice 23:

Placer sur le cercle trigonométrique les points images des réels $\frac{-22\pi}{3}$ et $\frac{47\pi}{4}$. Indiquer leur cosinus et leur sinus.

Exercice 24:

Simplifier l'expression suivante :

$$A(x) = \cos(3\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(6\pi - x)$$

Exercice 25:

Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation (E) : $2\sin^2(x) = 1$ et l'inéquation : (I) : $2 \cos(x) > \sqrt{2}$

Exercice 26 :

Soit ABCD un carré de côté 1. Soit M un point de [AB] tel que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et N un point de [BC] tel que $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

- 1) Faire une figure
- 2) En calculant le produit scalaire $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}$ de deux manières différentes déterminer la mesure exacte de l'angle \widehat{MDN} . On pourra introduire le repère (A, \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD}).

Exercice 27 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i} , \vec{j}). Soient A(-1; 4), B(2; 2) et C(1; 5). Déterminer une mesure arrondie au degré près de l'angle \widehat{BAC} .

Exercice 28 :

ABCD est un carré de côté a.

A EFG est un carré de côté b, tel que $A \in [DG]$ et $A \in [BE]$.

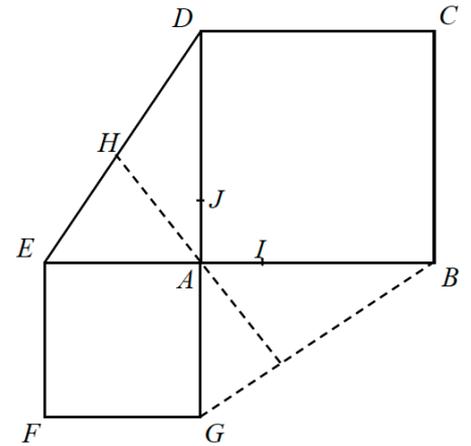
Le point H est le milieu du segment [DE].

Le but de l'exercice est de prouver que les droites (AH) et (BG) sont perpendiculaires par deux méthodes.

1) **sans utiliser les coordonnées :**

- a) Montrer que $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AH}$
- b) Calculer en le développant, le produit scalaire :

$$(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG})$$
- c) En déduire que (AH) et (BG) sont perpendiculaires.



2) **à l'aide des coordonnées :**

On a placé sur le schéma les points I et J tels que $AI = 1$ et $AJ = 1$; on considère alors le repère (A; I, J).

- a) Déterminer en fonction de a et b, les coordonnées des points E, D, B et G.
- b) Montrer (AH) et (BG) sont perpendiculaires.

Exercice 29 :

Soit le triangle ABC tel que $BC = 7$ cm, $AC = 3,7$ cm et $AB = 5,3$ cm.

Calculer la valeur exacte de $\cos \widehat{BAC}$ puis donner une valeur approcher de \widehat{BAC} à $0,1^\circ$ près.

Calculer la valeur exacte de $\cos \widehat{ABC}$ puis donner une valeur approcher de \widehat{ABC} à $0,1^\circ$ près.

Exercice 30 :

1) Soit A et B deux points du plan tels que $AB = 6$ cm et I le milieu de [AB]. Déterminer l'ensemble (E_1) des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 12$
 Déterminer l'ensemble (E_2) des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = -5$
 Montrer que $MA^2 + MB^2 = 26$ équivaut à $MI^2 = 4$. En déduire l'ensemble (E_3) des points M.

- 2) Soit le triangle ABC et I le milieu de [BC]. Déterminer l'ensemble (E_4) des points M tels que :
 $\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$.

Exercice 31 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Soient $A(3; 4)$, $B(1; -1)$ et $C(6; -2)$.

- 1) Déterminer une équation cartésienne de (AB) .
- 2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point C et parallèle à la droite (AB) .
- 3) Déterminer une équation cartésienne de la droite (d') passant par le point A et perpendiculaire à la droite (BC) .
- 4) Déterminer une équation cartésienne du cercle C_1 de diamètre $[BA]$.
- 5) Déterminer une équation de la tangente T au cercle C_1 en B .

Exercice 32 :

- 1) On considère l'équation $x^2 + y^2 - x - 3y - 5 = 0$.

Cette équation est-elle celle d'un cercle ? Si oui, en préciser le centre et le rayon.

- 2) On considère l'équation $(E): x^2 - 2ax + y^2 + 4y + 8 = 0$

Pour quelles valeurs de a cette équation est-elle celle d'un cercle ? Préciser alors son centre et son rayon.

Partie 7 – Probabilités

Exercice 33:

Deux urnes contiennent chacune 5 boules. L'urne n°1 contient 2 boules blanches et 3 boules noires. L'urne n°2 contient une boule blanche et 4 boules noires. On lance un dé équilibré à 6 faces notées de 1 à 6. Si le dé est 6 on tire une boule dans l'urne n°1, sinon on tire une boule dans l'urne n°2. On gagne lorsque l'on obtient une boule blanche. On note les événements :

« S » : le résultat du dé est un 6,

« B » : on tire une boule blanche.

- 1) Donner sous forme de fraction irréductible les probabilités suivantes : $p(S)$, $p(\bar{S})$, $p_s(B)$, $p_{\bar{s}}(\bar{B})$
- 2) Construire un arbre pondéré décrivant le jeu.
- 3) Montrer que la probabilité de gagner à ce jeu est égale à $\frac{7}{30}$.
- 4) Un jour a gagné. Quelle est la probabilité que la boule provienne de l'urne n°1 ?
- 5) Les événements B et S sont-ils indépendants ?

Exercice 34 :

On considère la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous. On sait que : $E(X) = 1,4$. Calculer a et b . En déduire la variance et l'écart-type.

x_i	-5	-2	8
$p(X = x_i)$	0,2	a	b

Exercice 35 :

Après avoir misé 2€, on lance deux dés équilibrés. Si la somme des résultats obtenus est supérieure ou égale à 10, on gagne 10€, sinon on ne gagne rien.

Soit G la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur en €. Déterminer la loi de probabilité de G . calculer $E(G)$ et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 36:

Un tireur participe à un concours de tir à l'arc et atteint sa cible neuf fois sur dix. Il tire 5 flèches sur la cible. Pour chaque flèche, s'il atteint la cible, il gagne 10 euros sinon il perd 20 euros. On suppose que les tirs sont indépendants.

- 1) Quelle est la probabilité d'atteindre au moins deux fois la cible ?
- 2) On appelle Y la variable aléatoire égale au gain du joueur à l'issue des 5 tirs.
 - a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?
 - b) Donner la loi de probabilité de Y
 - c) Quel est le gain moyen du tireur ? Est-ce intéressant pour lui ? Justifier.
 - d) Calculer la variance et l'écart-type .

Exercice 37:

Un restaurateur propose deux formules au déjeuner : le menu express à 12€ et le menu du jour à 15€. La bière est en supplément à 2€. 60% des clients choisissent le menu express et 70 % prennent une bière. De plus 40% des clients choisissant le menu du jour prennent une bière.

- 1) Compléter le tableau ci-dessous :

	Bière en supplément	Pas de bière	Total
Menu express			60
Menu du jour			
Total			

On choisit au hasard un client de ce restaurant et on note D la variable aléatoire représentant sa dépense en €.

- 2) Déterminer la loi de probabilité de D .
- 3) Calculer l'espérance de D et interpréter le résultat obtenu.
- 4) Le restaurateur fait 200 repas par déjeuner. Quelle recette peut-il espérer ?