

## Partie 1 – Polynôme du second degré

### Exercice 1 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - 10x + 5$

- Déterminer la forme canonique de  $f$ .
- En déduire l'extremum (maximum ou minimum) de  $f$  et la valeur de  $x$  pour lequel il est atteint.
- Mêmes questions avec  $g(x) = -2x^2 + 8x - 13$

$$f(x) = (x - 5)^2 - 15 \quad f \text{ atteint un minimum de } -15 \text{ en } x = 5.$$

$$g(x) = -2(x - 2)^2 - 5 \quad g \text{ atteint un maximum de } -5 \text{ en } x = 2.$$

### Exercice 2 :

Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes puis donner leur tableau de variation :

- $f(x) = 2x^2 - 12x + 3$
- $f(x) = -3(x + 1)^2 - 5$
- $f(x) = x(x - 8)$

a) La fonction  $f$  est une fonction polynôme dérivable sur  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = 4x - 12$

$f'(x)$  s'annule en  $x = 3$ .

$f$  est strictement croissante sur  $[3; +\infty[$  ;  $f$  est strictement décroissante sur  $] -\infty; 3]$

$x$	3	
$f'(x)$	-	+
$f(x)$		

b) La fonction  $f$  est une fonction polynôme dérivable sur  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = -6(x + 1)$

$f'(x)$  s'annule en  $x = -1$ .

$f$  est strictement décroissante sur  $[-1; +\infty[$  ;  $f$  est strictement croissante sur  $] -\infty; -1]$

$x$	-1	
$f'(x)$	+	-
$f(x)$		

c) La fonction  $f$  est une fonction polynôme dérivable sur  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = 2x - 8$

$f'(x)$  s'annule en  $x = 4$ .

$f$  est strictement croissante sur  $[4; +\infty[$  ;  $f$  est strictement décroissante sur  $] -\infty; 4]$

$x$	4	
$f'(x)$	-	+
$f(x)$		

### Exercice 3 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

a)  $(E_1) : 6x^2 - 7x - 3 = 0$    b)  $(E_2) : x^2 - 19x - 216 = 0$    c)  $(E_3) : x^4 - x^2 - 2 = 0$

d)  $(I_1) : 8x^2 - 2x - 3 < 0$    e)  $(I_2) : \frac{x^2 - x - 20}{3x^2 - 20x - 7} \geq 0$

a)  $(E_1) : 6x^2 - 7x - 3 = 0 \quad S = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$

b)  $(E_2) : x^2 - 19x - 216 = 0 \quad S = \{-9; 24\}$

c)  $(E_3) : x^4 - x^2 - 2 = 0$

On effectue un changement de variable en posant  $X = x^2$  et on résout l'équation :  $(E) : X^2 - X - 2 = 0$  qui a deux racines évidentes  $-1$  et  $2$ .

$(E) : X^2 - X - 2 = 0 \Leftrightarrow X = -1 \text{ ou } X = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$   
 $S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

d)  $(I_1) : 8x^2 - 2x - 3 < 0$

Le polynôme  $8x^2 - 2x - 3$  s'annule en  $x = -\frac{1}{2}$  et  $x = \frac{3}{4}$ .

Le coefficient de  $x^2$  étant positif, le polynôme est négatif à l'intérieur des racines.

$$S = \left]-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right[$$

e)  $(I_2) : \frac{x^2 - x - 20}{3x^2 - 20x - 7} \geq 0$

$\frac{x^2 - x - 20}{3x^2 - 20x - 7}$  est défini sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}; 7\right\}$ .

$x^2 - x - 20$  s'annule en  $x = -4$  et  $x = 5$ . Le coefficient de  $x^2$  étant positif, le polynôme est positif à l'extérieur des racines. Idem pour le polynôme  $3x^2 - 20x - 7$ .

$x$	$-\infty$	$-4$	$-\frac{1}{3}$	$5$	$7$	$+\infty$	
$x^2 - x - 20$	+	0	-	-	0	+	+
$3x^2 - 20x - 7$	+	+	0	-	-	0	+
$\frac{x^2 - x - 20}{3x^2 - 20x - 7}$	+	0	-	+	0	-	+

$$S = ]-\infty; -4] \cup \left] -\frac{1}{3}; 5 \right] \cup ]7; +\infty[$$

### Exercice 4 :

$m$  est un réel fixé différent de  $\frac{3}{2}$ .  $P_m$  est un polynôme défini par  $P_m(x) = (2m - 3)x^2 - 2mx - 1$ .

- 1) Calculer le discriminant du polynôme  $P_m$ .
- 2) Pour quelles valeurs de  $m$  l'équation  $P_m(x) = 0$  n'admet-elle qu'une solution ?
- 3) Pour quelles valeurs de  $m$  l'équation  $P_m(x) = 0$  n'admet-elle aucune solution dans  $\mathbb{R}$  ?
- 4) Pour quelles valeurs de  $m$  a-t-on  $P_m(x) > 0$  pour tout réel  $x$  ?

$m \neq \frac{3}{2}$  donc  $P_m$  est un polynôme du 2<sup>nd</sup> degré.

1)  $\Delta = 4m^2 - 4(2m - 3) \times (-1) = 4m^2 + 8m - 12 = 4(m^2 + 2m - 3)$

Le polynôme  $m^2 + 2m - 3$  a une racine évidente  $1$  et une deuxième racine  $-3$ .

$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$  ou  $m = -3$

$P_m(x) = 0$  n'admet qu'une solution si et seulement si  $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$  ou  $m = -3$

$P_m(x) = 0$  n'admet aucune solution si et seulement si  $\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow m \in ]-3; 1[$

$P_m(x) > 0$  si et seulement si  $\Delta < 0$  et  $2m - 3 > 0 \Leftrightarrow m \in ]-3; 1[$  et  $m > \frac{3}{2}$ .  $S = \emptyset$

**Exercice 5 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$  et un réel  $h$  non nul. On désigne par  $C_f$  sa courbe représentative.

- 1) Vérifier que  $f(-3 + h) = 3h^2 - 20h + 34$
- 2) En déduire que le taux de variation de  $f$  entre  $-3$  et  $-3 + h$  est  $\tau(h) = 3h - 20$
- 3) La fonction est-elle dérivable en  $-3$  ? Si oui, préciser le nombre dérivé.
- 4) Déterminer l'équation de la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse  $-3$ .

1) Pour tout réel  $h$  non nul,  $f(-3 + h) = 3(-3 + h)^2 - 2(-3 + h) + 1 = 3h^2 - 20h + 34$

2) Pour tout réel  $h$  non nul,  $\tau(h) = \frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \frac{3h^2-20h+34-34}{h} = 3h - 20$

3)  $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = -20$  qui est une limite finie donc la fonction  $f$  est dérivable en  $-3$  et  $f'(-3) = -20$ .

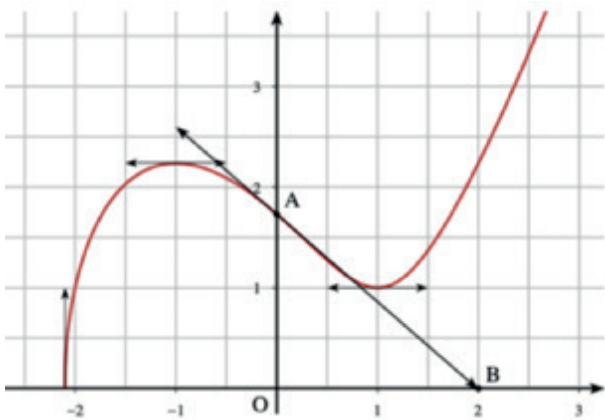
4) L'équation réduite de la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse  $-3$  est :  $y = f'(-3)(x + 3) + f(-3)$

$$y = -20(x + 3) + 34$$

$$y = -20x - 26$$

**Exercice 6 :**

Soit la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $[-2, 1; +\infty[$ . La tangente à cette courbe en  $A(0 ; 1,73)$  passe par le point  $B(2 ; 0)$ .



Par lecture graphique, compléter le tableau suivant :

$x$	-1	0	1
$f(x)$	2,25	1,75	1
$f'(x)$	0	$-\frac{1,73}{2} = -0,865$	0

**Exercice 7 :**

Pour chacune des fonctions suivantes, écrire son domaine de définition, de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.

$f_1(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$	$f_2(x) = \sqrt{x}(2x + 1)$	$f_3(x) = (2x - 3)(x^2 + 4x - 1)$
---	-----------------------------	-----------------------------------

$f_4(x) = \frac{x-5}{x+2}$	$f_5(x) = \frac{2x+5}{x^2+x+3}$	$f_6(x) = \frac{5}{x^2-1}$
$f_7(x) = \sqrt{2-3x}$	$f_8(x) = (-5x+4)^2$	

$f_1$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'_1(x) = \frac{2}{3} \times 3x^2 - \frac{1}{2} \times 2x - 6 = 2x^2 - x - 6$

$f_2$  est définie sur  $]0; +\infty[$  et dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $f'_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (2x+1) + \sqrt{x} \times 2$

$$f'_2(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x} \times (2x+1) + 2\sqrt{x} = 3\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2x}$$

$f_3$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'_3(x) = 2(x^2+4x-1) + (2x-3)(2x+4)$

$$f'_3(x) = 2x^2 + 8x - 2 + 4x^2 + 2x - 12 = 6x^2 + 10x - 14$$

$f_4$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  et dérivable sur  $] -\infty; -2[$  et sur  $] -2; +\infty[$

$$f'_4(x) = \frac{1 \times (x+2) - 1 \times (x-5)}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$$

$f_4$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  et dérivable sur  $] -\infty; -2[$  et sur  $] -2; +\infty[$

$f_5(x) = \frac{2x+5}{x^2+x+3}$  Le polynôme  $x^2+x+3$  a pour discriminant  $-11$  et n'admet donc pas de racine réelle. Le dénominateur ne s'annule donc pas.  $f_5$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$f'_5(x) = \frac{2 \times (x^2+x+3) - (2x+5) \times (2x+1)}{(x^2+x+3)^2} = \frac{2x^2+2x+6 - (4x^2+12x+5)}{(x^2+x+3)^2}$$

$$f'_5(x) = \frac{-2x^2 - 10x + 1}{(x^2+x+3)^2}$$

$f_6(x) = \frac{5}{x^2-1}$  Le polynôme  $x^2-1$  a pour racines  $+1$  et  $-1$ .  $f_5$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  et dérivable sur  $] -\infty; -1[$ , sur  $] -1; 1[$  et sur  $] 1; +\infty[$ .

$$f'_6(x) = \frac{0 \times (x^2-1) - (2x) \times 5}{(x^2-1)^2} = \frac{-10x}{(x^2-1)^2}$$

$f_7(x) = \sqrt{2-3x}$ .  $f_7$  est une fonction composée définie sur  $] -\infty; \frac{2}{3}]$  et dérivable sur  $] -\infty; \frac{2}{3}[$

$$f'_7(x) = \frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}$$

$f_8(x) = (-5x+4)^2$   $f_7$  est une fonction composée définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$f'_8(x) = -5 \times 2(-5x+4) = -10(-5x+4)$$

### Exercice 8 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par  $f(x) = \frac{x^2-4x+7}{x-1}$ . On désigne par  $C_f$  sa courbe représentative.

- 1) Calculer la dérivée de  $f$  et montrer que  $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$
- 2) Étudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variation.
- 3) Déterminer l'équation de la tangente  $T$  à  $C_f$  au point d'abscisse 2.
- 4) Existe-t-il des tangentes à  $C_f$  parallèles à la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}x - 5$  ? Si oui, en quels points ?

Corrigé :

$f$  est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  et dérivable sur  $]-\infty ; 1[$  et sur  $]1 ; +\infty[$ .

$$1) f'(x) = \frac{(2x-4)(x-1) - 1(x^2-4x+7)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-4x+4-x^2+4x-7}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

- 2)  $f'(x) = 0$ ,  $x_1 = -1$  racine évidente,  $P = -3$  donc  $x_2 = 3$ .  
 Signe  $f'(x) = \text{signe}(x^2 - 2x - 3)$  car  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ ,  $(x-1)^2 > 0$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$3$	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$-6$	$-\infty$	$+\infty$	$2$	$+\infty$

$$f(-1) = \frac{1+4+7}{-2} = -6$$

$$f(3) = \frac{9-12+7}{2} = 2$$

- 3) (T) :  $y = f'(2)(x-2) + f(2)$  avec  $f'(2) = -3$  et  $f(2) = 3$

$$(T) : y = -3(x-2) + 3 \Leftrightarrow y = -3x + 9$$

B2C-Vers la terminale-Eté 2024

$$4) f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2-4x-6 = x^2-2x+1 \Leftrightarrow x^2-2x-7 = 0$$

$$\Delta = 4 + 28 = 32 = (4\sqrt{2})^2 \text{ d'où } x_1 = \frac{2+4\sqrt{2}}{2} = 1+2\sqrt{2} \text{ ou } x_2 = 1-2\sqrt{2}.$$

Il existe 2 tangentes à la courbe  $\mathcal{C}_f$  parallèles à la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}x - 5$  en  $x = 1 + 2\sqrt{2}$  et  $x = 1 - 2\sqrt{2}$ .

### Partie 3 – Exponentielle

### Exercice 9 :

Simplifier les écritures suivantes :

$(e^x)^3 e^{-2x}$	$\frac{e^{x-1}}{e^{x+2}}$	$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x}$	$e^{-x} e^2$	$\frac{e^{3x}}{(e^{-x})^2 e^x}$	$\frac{e^x e^y}{e^{x-y}}$	$\frac{(e^{-3x})^2 e^{5x}}{e^{-x}}$
$e^{3x} e^{-2x}$ $= e^x$	$e^{x-1-(x+2)}$ $= e^{-3}$	$1 + e^{-2x}$	$e^{2-x}$	$\frac{e^{3x}}{e^{-2x} e^x} =$ $e^{3x+2x-x}$ $= e^{4x}$	$e^{x+y-x+y}$ $= e^{2y}$	$e^{-6x+5x+x}$ $= 1$

### Exercice 10 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et inéquations suivantes :

e)  $(E_5): e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$  (changer de variable)

f)  $(I_1): (e^x)^3 \leq e^{x-2}$

g)  $(I_2): e^x > \frac{1}{e^x}$

h)  $(I_3): (e^x - 1)e^x > e^x - 1$

Montrer que :  $3e^{2x} + e^x - 4 = (e^x - 1)(3e^x + 4)$ . En déduire le signe de  $3e^{2x} + e^x - 4$  en fonction de  $x$ .

a)  $(E_1) \Leftrightarrow e^{3-x} = e^0$

$(E_1) \Leftrightarrow 3 - x = 0$

$(E_1) \Leftrightarrow x = 3$

$S = \{3\}$

b)  $(E_2) \Leftrightarrow 2x^2 + 3 = 7x$

$(E_2) \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0$

Le polynôme  $2x^2 - 7x + 3$  a pour discriminant 25 et pour racines 3 et  $\frac{1}{2}$ .

$(E_2) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$  ou  $x = 3$

$S = \left\{ \frac{1}{2}; 3 \right\}$

c)  $(E_3): 2e^{-x} = \frac{1}{e^{x+2}}$  Pour tout réel  $x, e^x + 2 > 0$ . Résolvons  $(E_3)$  dans  $\mathbb{R}$ .

$(E_3) \Leftrightarrow 2e^{-x}(e^x + 2) = 1$

$(E_3) \Leftrightarrow 2 + 4e^{-x} = 1$

$(E_3) \Leftrightarrow 4e^{-x} = -1$  or Pour tout réel  $x, 4e^{-x} > 0$ . Donc,  $S = \emptyset$

d)  $(E_4): e^{x+1} = e^{\frac{1}{x}}$  Résolvons  $(E_4)$  dans  $\mathbb{R}^*$ .

Pour  $x$  non nul,

$(E_4) \Leftrightarrow x + 1 = \frac{1}{x}$

$(E_4) \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$  Le polynôme  $x^2 + x - 1$  a pour discriminant 5 et pour racines  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  et  $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ .

$S = \left\{ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}$

e)  $(E_5): e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ . Résolvons  $(E_5)$  dans  $\mathbb{R}$ .

On pose  $X=e^x$ . Pour tout réel  $x, e^x > 0$  donc  $X \geq 0$ .

Pour  $X$  réel positif ou nul,  $(E_5) \Leftrightarrow X^2 + 2X - 3 = 0$ .

Le polynôme  $X^2 + 2X - 3$  a pour discriminant 16 et pour racines  $-3$  et  $1$ . Or,  $X \geq 0$  donc  $X = 1$ .

$(E_5) \Leftrightarrow e^x = 1$

$(E_5) \Leftrightarrow x = 0$

$S = \{0\}$

f)  $(I_1): (e^x)^3 \leq e^{x-2}$  Résolvons  $(I_1)$  dans  $\mathbb{R}$ .

$(I_1) \Leftrightarrow 3x \leq x - 2$

$(I_1) \Leftrightarrow x \leq -1$   $S = ]-\infty; -1]$

g)  $(I_2): e^x > \frac{1}{e^x}$  Résolvons  $(I_2)$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$(I_2) \Leftrightarrow e^{2x} > e^0$$

$$(I_2) \Leftrightarrow 2x > 0 \quad S = \mathbb{R}^{+*}$$

h)  $(I_3): (e^x - 1)e^x > e^x - 1$  Résolvons  $(I_3)$  dans  $\mathbb{R}$ .

$$(I_3) \Leftrightarrow (e^x - 1)e^x - (e^x - 1) > 0$$

$$(I_3) \Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x - 1) > 0$$

$$(I_3) \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 > 0 \quad S = \mathbb{R}^*$$

Montrer que :  $3e^{2x} + e^x - 4 = (e^x - 1)(3e^x + 4)$ . En déduire le signe de  $3e^{2x} + e^x - 4$  en fonction de  $x$ .

$$\text{Pour tout réel } x, (e^x - 1)(3e^x + 4) = 3e^{2x} + 4e^x - 3e^x - 4 = 3e^{2x} + e^x - 4$$

On pose  $X=e^x$ . Pour tout réel  $x, e^x > 0$  donc  $X \geq 0$ .

Pour  $X$  réel positif ou nul,  $3e^{2x} + e^x - 4 \Leftrightarrow 3X^2 + X - 4$ .

Le polynôme  $3X^2 + X - 4$  a pour discriminant 49 et pour racines 1 et  $-\frac{4}{3}$ .

Or,  $X \geq 0$ , donc le polynôme  $3e^{2x} + e^x - 4$  a pour seule racine 0.

$$e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

B2C-Vers la terminale-Eté 2024

Donc,  $3e^{2x} + e^x - 4 > 0$  sur  $]0; +\infty[$

$3e^{2x} + e^x - 4 < 0$  sur  $] -\infty; 0[$

$3e^{2x} + e^x - 4$  s'annule en  $x = 0$ .

### Exercice 11 :

Déterminer les dérivées puis en déduire le sens de variation des fonctions suivantes :

a)  $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$    b)  $g(x) = \frac{1}{x}e^x$    c)  $h(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x + 1}$    d)  $k(x) = e^{-2x+1}$

e)  $m(x) = xe^{2x^2-3}$

a)  $f$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x)e^x = (x^2 - 2)e^x$

Pour tout réel  $x, e^x > 0$ . Donc, le signe de  $f'(x)$  dépend du signe de  $x^2 - 2$ .

$$f'(x) > 0 \text{ sur } ]-\infty; -\sqrt{2}[ \text{ et sur } ]\sqrt{2}; +\infty[$$

$$f'(x) < 0 \text{ sur } ]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$$

$f'(x)$  s'annule en  $-\sqrt{2}$  et en  $\sqrt{2}$ .

Donc,  $f$  est strictement décroissante sur  $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$  et est strictement croissante sur  $] -\infty; -\sqrt{2}[$  et sur  $]\sqrt{2}; +\infty[$ .

b)  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  et dérivable sur  $] -\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$ .

Pour tout réel non nul,  $g'(x) = -\frac{1}{x^2}e^x + \frac{1}{x}e^x = \frac{x-1}{x^2}e^x$ . Or, pour tout réel non nul,  $e^x > 0$  et  $x^2 > 0$ .

$g'(x) > 0$  sur  $]1; +\infty[$ ;  $g'(x) < 0$  sur  $] -\infty; 1[$ ;  $g'(x)$  s'annule en 1.

Donc,  $g$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; 1[$  et est strictement croissante sur  $]1; +\infty[$ .

c)  $h(x) = \frac{e^x - 1}{2e^{x+1}}$   $h$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $h'(x) = \frac{e^x(2e^{x+1}) - 2e^x(e^x - 1)}{(2e^{x+1})^2} = \frac{e^x + 1}{(2e^{x+1})^2} > 0$ .  $h$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

d)  $k(x) = e^{-2x+1}$   $k$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  $k$  est une fonction composée.

Pour tout réel  $x$ ,  $k'(x) = -2e^{-2x+1} < 0$ .  $h$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

e)  $m(x) = xe^{2x^2-3}$   $m$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $m'(x) = 1 \times e^{2x^2-3} + x \times 4xe^{2x^2-3} = (1 + 4x)e^{2x^2-3}$

Pour tout réel  $x$ ,  $e^{2x^2-3} > 0$ , donc  $m'(x) > 0$  sur  $]-\frac{1}{4}; +\infty[$ ;  $m'(x) < 0$  sur  $]-\infty; -\frac{1}{4}[$ ;  $m'(x)$  s'annule en  $-\frac{1}{4}$ .

Donc,  $m$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; -\frac{1}{4}[$  et est strictement croissante sur  $]-\frac{1}{4}; +\infty[$ .

### Exercice 12 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{2e^x - 3}{e^{x+1}}$ . Calculer  $f'(x)$  puis étudier les variations de  $f$ .

Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, -3 < f(x) < 2$ .

Déterminer l'équation de la tangente  $T$  au point d'abscisse 2.

Pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{2e^x(e^{x+1}) - e^x(2e^x - 3)}{(e^{x+1})^2} = \frac{5e^x(e^{x+1}) - 5e^x}{(e^{x+1})^2} = \frac{5e^x(e^x - 1)}{(e^{x+1})^2}$

Pour tout réel  $x$ ,  $5e^x > 0$  et  $e^x + 1 > 0$  et  $(e^x + 1)^2 > 0$  donc  $f'(x) > 0$ , donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$\forall x \in \mathbb{R}, 1 < e^x + 1$  donc  $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{e^{x+1}} < 1$ , donc  $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{-3}{e^{x+1}} > -3$  et donc  $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{2e^x - 3}{e^{x+1}} > -3$  (car  $2e^x > 0$ )

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - 2 = \frac{2e^x - 3}{e^{x+1}} - 2 = \frac{2e^x - 3 - 2e^{x+1}}{e^{x+1}} = \frac{-5}{e^{x+1}} < 0$  et donc  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < 2$ .

$f(2) = \frac{2e^2 - 3}{e^2 + 1}$  et  $f'(2) = \frac{5e^2}{e^2 + 1}$

$T : y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

$T : y = \frac{5e^2}{e^2 + 1}(x - 2) + \frac{2e^2 - 3}{e^2 + 1}$

$T : y = \frac{1}{e^2 + 1}(5e^2x - 10e^2 + 2e^2 - 3)$

$T : y = \frac{1}{e^2 + 1}(5e^2x - 8e^2 - 3)$

### Exercice 13 :

- 1) Déterminer la nature de la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = e^{3n}$ . Indiquer sa raison et son premier terme.
- 2) On considère la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = e^n$ .
  - a. Montrer que  $(v_n)$  est géométrique.
  - b. Calculer la somme :  $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{50}$

1)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{3(n+1)} = e^3 e^{3n} = e^3 u_n$  donc la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $e^3$  et de 1<sup>er</sup> terme  $u_0 = e^0 = 1$ .



2)  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = e^{(n+1)} = ee^n = ev_n$  donc la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $e$  et de 1<sup>er</sup> terme  $v_0 = e^0 = 1$ .

$$S = v_0 \left( \frac{1 - q^{50+1}}{1 - q} \right) = \frac{1 - e^{51}}{1 - e}$$

### Exercice 14 :

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C. À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit. On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint. La température du four est exprimée en degré Celsius (°C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70 °C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

On note  $t$  le temps, **en heure**, écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.

La température du four (en degré Celsius) à l'instant  $t$  est donnée par la fonction  $f$  définie, pour tout nombre réel  $t$  positif, par :  $f(t) = ae^{-\frac{t}{5}} + b$  où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels.

On admet que  $f$  vérifie la relation suivante :  $f'(t) + \frac{1}{5}f(t) = 4$

- 1) Déterminer les valeurs de  $a$  et  $b$  sachant qu'initialement, la température du four est de 1000 °C.
- 2) Étudier les variations de  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$ . En déduire son tableau de variations.
- 3) Avec ce modèle, après combien de minutes le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ?

### Corrigé :

$f$  est définie et dérivable sur  $[0 ; +\infty[$ .

$$1) f'(t) + \frac{1}{5}f(t) = 4 \Leftrightarrow -\frac{a}{5}e^{-\frac{t}{5}} + \frac{a}{5}e^{-\frac{t}{5}} + \frac{b}{5} = 4 \Leftrightarrow \frac{b}{5} = 4 \Leftrightarrow b = 20.$$

La fonction  $f$  est alors de la forme :  $f(t) = ae^{-\frac{t}{5}} + 20$ .

$$f(0) = 1000 \Leftrightarrow a + 20 = 1000 \Leftrightarrow a = 980.$$

Conclusion :  $f(t) = 980e^{-\frac{t}{5}} + 20$ .

$$b) f'(x) = -\frac{980}{5}e^{-\frac{x}{5}} = -196e^{-\frac{x}{5}}, \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) < 0.$$

La fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ , ce qui est cohérent avec le refroidissement du four.

$t$	0	$t_{70}$	$+\infty$
$f'(t)$	+		
$f(t)$	1000	70	20

Pour utiliser l'algorithme de dichotomie avec la calculatrice, comme ce programme résout  $f(x) = 0$ , il faut entrer ici comme fonction

$$g(x) = f(x) - 70 = 980e^{-\frac{x}{5}} + 20 - 70 = 980e^{-\frac{x}{5}} - 50$$

On trouve alors :  $14,877 < t_{70} < 14,878$  après 50 itérations.

Transformons le résultat en heures, minutes :

$$14,877 \times 60 < 892' \approx 14 \text{ h } 52' \text{ et } 14,878 > 14 \text{ h } 53'$$

On peut ouvrir les porte du four après 14 h 53'.

**Exercice 15 :**

Calculer les 3 premières valeurs et conjecturer à l'aide d'une calculatrice, le sens de variation de la suite.

a)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -n^2 + 3n - 5$

b)  $\begin{cases} u_0 = -3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - 7 \end{cases}$

Les suites sont-elles arithmétiques ? géométriques ? justifier

a)  $u_0 = -5 \quad u_1 = -3 \quad u_2 = -3 \quad u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$  et  $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$  La suite est ni arithmétique ni géométrique.

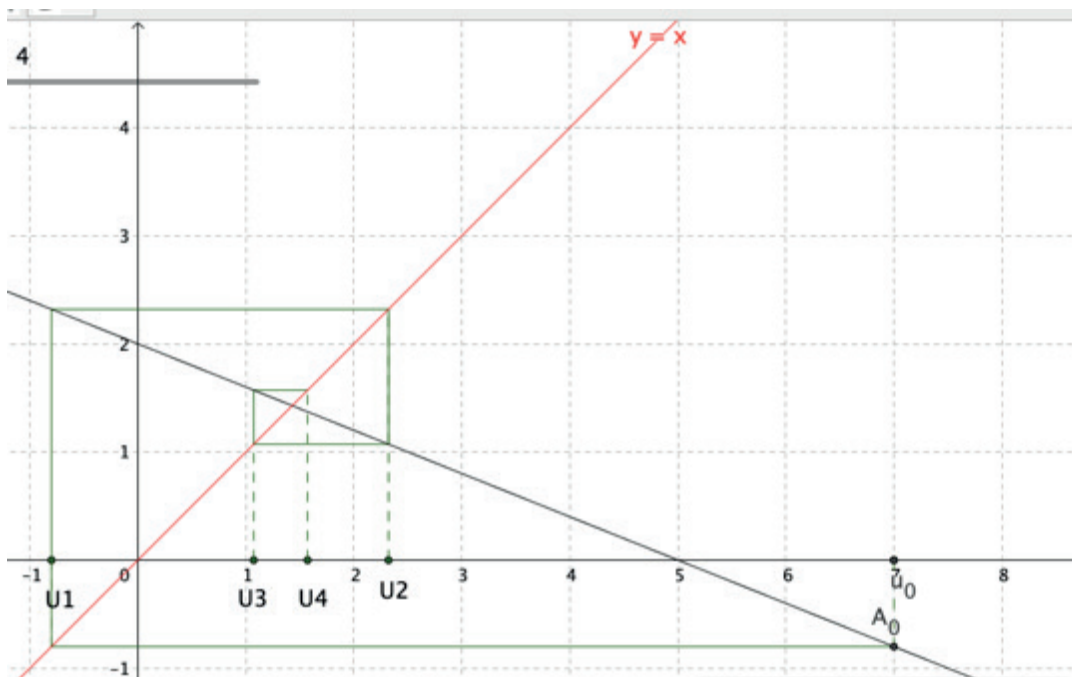
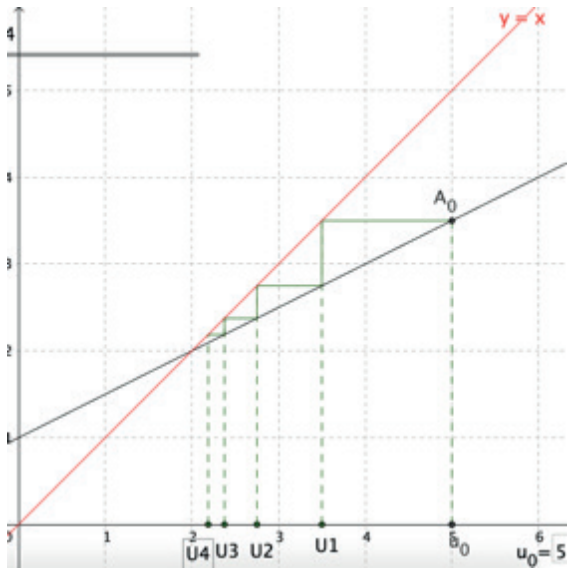
b)  $u_0 = -3 \quad u_1 = -2,5 \quad u_2 = -3,875$  suite ni arithmétique ni géométrique

**Exercice 16 :**

Représenter graphiquement les 4 premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

a)  $\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} u_0 = 7 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\frac{2}{5}u_n + 2 \end{cases}$



### Exercice 17 :

Dans chaque cas, exprimer le terme  $u_{n+1}$  en fonction de  $n$ , puis en fonction de  $u_n$ . Préciser alors la nature des suites.

a)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3n - 5$       b)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{4-7n}{5}$       c)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{4^n}{3^{2n}}$

a)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3(n+1) - 5 = 3n - 2$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 3n - 2 - 3n + 5 = 3$

La suite  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme  $u_0 = -5$

b)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4-7(n+1)}{5} = \frac{4-7n}{5} - \frac{7}{5} = u_n - \frac{7}{5}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -\frac{7}{5}$

La suite  $(u_n)$  est une suite arithmétique de raison  $-\frac{7}{5}$  et de premier terme  $u_0 = \frac{4}{5}$

c)  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{3^{2n+2}} = \frac{4 \times 4^n}{3^2 \times 3^{2n}} = \frac{4}{9} \times \frac{4^n}{3^{2n}}$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4}{9} u_n$

La suite  $(u_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{4}{9}$  et de premier terme  $u_0 = 1$ .

### Exercice 18 :

$(u_n)$  est une suite arithmétique telle que  $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_{10} + u_{11} = 40 \end{cases}$

- 1) Calculer le 1<sup>er</sup> terme  $u_0$  et la raison  $r$ .
- 2) Calculer alors  $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{30}$

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_{10} + u_{11} = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr \\ u_0 + r + u_0 + 2r + u_0 + 3r = 9 \\ u_0 + 10r + u_0 + 11r = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_0 + 6r = 9 \\ 2u_0 + 21r = 40 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6u_0 + 12r = 18 \\ 6u_0 + 63r = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 51r = 102 \\ 3u_0 + 6r = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 51r = 102 \\ 6u_0 + 12r = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -1 + 2n$$

$S$  est la somme des 31 premiers termes d'une suite arithmétique de raison 2 et de 1<sup>er</sup> terme  $-1$ .

$$S = 31 \times \frac{-1 - 1 + 2 \times 30}{2} = 899$$

### Exercice 19 :

Étudier le sens de variation des suites numériques  $(u_n)$  définies ci-dessous :

a)  $u_n = n^2 - 5n + 1$       b)  $u_n = n + \frac{1}{n+1}$       c)  $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^{2n}}$

a) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = x^2 - 5x + 1$

Pour tout  $x$  positif,  $f'(x) = 2x - 5$ .  $f$  est donc strictement décroissante sur  $\left[0; \frac{5}{2}\right]$  et strictement croissante sur  $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$ .

Donc,  $(u_n)$  est strictement croissante sur  $\left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$  et strictement décroissante sur  $\left[0; \frac{5}{2}\right]$ .

b) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$

Pour tout  $x$  positif,  $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \geq 0$

Donc  $f$  est donc strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .  
Donc,  $(u_n)$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ .

c)  $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^{2n}}$

**tous les termes de la suite sont strictement positifs**

**Comparaison de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  à 1 :**

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+2}}{3^{2n+2}}}{\frac{2^{n+1}}{3^{2n}}} = \frac{2^{n+2}}{3^{2n+2}} \times \frac{3^{2n}}{2^{n+1}} = \frac{2}{9} < 1 \text{ donc } (u_n) \text{ est décroissante}$$

**Exercice 20 :**

Calculer les sommes :

a)  $S = 10 + 12 + 14 + \dots + 80$       b)  $S = 1 + 4 + 7 + \dots + 364$       c)  $S = \frac{3^4}{5} + \frac{3^5}{5} + \dots + \frac{3^{12}}{5}$

a)  $S = 10 + 12 + 14 + \dots + 80$

$S$  est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 2 (nombres pairs) et de 1<sup>er</sup> terme 0.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 + u_n$  avec  $u_0 = 0$ .

$u_n = 10 = 0 + 2n \Leftrightarrow n = 5$  donc 10 est le 6<sup>e</sup> terme de la suite.

$u_n = 80 = 0 + 2n \Leftrightarrow n = 40$  donc 80 est le 41<sup>e</sup> terme de la suite.

$$S = (41 - 6 + 1) \times \frac{u_5 + u_{40}}{2} = 36 \times \frac{10 + 80}{2} = 1620$$

b)  $S = 1 + 4 + 7 + \dots + 364 = 22265$

$S$  est la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 3 et de 1<sup>er</sup> terme 1.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3 + u_n$  avec  $u_0 = 1$ .

$u_n = 364 = 1 + 3n \Leftrightarrow n = 121$  donc 364 est le 122<sup>e</sup> terme de la suite.

$$S = 122 \times \frac{1 + 364}{2} = 22\,265$$

c)  $S = \frac{3^4}{5} + \frac{3^5}{5} + \dots + \frac{3^{12}}{5}$

$S$  est la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3 et de 1<sup>er</sup> terme  $\frac{3^4}{5}$ .

$$u_0 = \frac{3^4}{5} \quad u_1 = 3^1 \times \frac{3^4}{5} = \frac{3^5}{5} \quad \text{et} \quad u_8 = 3^8 \times \frac{3^4}{5} = \frac{3^{12}}{5}$$

$$S_n = \text{1er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

$$S = \frac{3^4}{5} \times \frac{1 - 3^{8+1}}{1 - 3} = -\frac{81}{10} (1 - 3^9) = 159424,2$$

### Exercice 21 :

$(u_n)$  est une suite définie par :  $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n} \end{cases}$

- On pose  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ . Démontrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique.
- En déduire l'expression de  $(v_n)$  puis de  $(u_n)$  en fonction de  $n$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1+1}}{u_{n+1}} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{u_n}{1-u_n} + 1}{\frac{u_n}{1-u_n}} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{1-u_n}} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1-u_n}{u_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1-u_n}{u_n} - \frac{u_n}{u_n} = -\frac{u_n}{u_n} = -1.$$

$(v_n)$  est une suite arithmétique de raison  $-1$  et de premier terme  $v_0 = \frac{u_0+1}{u_0} = \frac{1}{2}$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{2} - n$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} - n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2}u_n - nu_n = u_{n+1} + 1 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \left( \frac{1}{2} - n - 1 \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n = -\frac{1}{\frac{1}{2} + n} = -\frac{2}{1 + 2n}$$

### Exercice 22 :

Une balle est lâchée d'une hauteur de 3 m au-dessus du sol. Elle touche le sol et rebondit. A chaque rebond, elle perd 25% de sa hauteur précédente. On modélise la hauteur de la balle par une suite  $(h_n)$  où  $h_n$  désigne la hauteur maximale de la balle, en mètres, après le  $n$ -ième rebond.

- Calculer  $h_0, h_1, h_2$
- Donner, en justifiant, la nature de  $(h_n)$  et préciser ses éléments caractéristiques.
- Donner la hauteur, arrondie au cm, de la balle après 6 rebonds.
- La fonction « seuil » est définie en Python. Compléter cet algorithme pour que cette fonction renvoie le nombre de rebonds à partir duquel la hauteur maximale de la balle sera inférieure ou égale à 10 cm.

```
def seuil():
    h=3
    n=0
    while .....:
        h = .....
        n=n+1
    return n
```

### Corrigé :

1)  $h_1 = 3 - 0,25 \times 3 = 2,25$  et  $h_2 = 2,25 - 0,25 \times 2,25 = 1,6875$ .

2)  $h_1 - h_0 = 0,75$  et  $h_2 - h_1 = 0,5625$  donc  $h_1 - h_0 \neq h_2 - h_1$ .

La suite  $(h_n)$  n'est pas arithmétique.

3) Exprimons  $h_{n+1}$  en fonction de  $h_n$  :  $h_{n+1} = h_n - 0,25h_n = 0,75h_n$ .

La suite  $(h_n)$  est géométrique de raison  $q = 0,75$  et de premier terme  $h_0 = 3$ .

4)  $h_6 = h_0q^6 = 3 \times 0,75^6 \approx 0,534$ .

La hauteur de la balle après 6 rebonds est de 53 cm.

5) On obtient l'algorithme suivant :

Le programme renvoie 12

vérification :  $u_{11} \approx 0,126$  et  $u_{12} \approx 0,095$

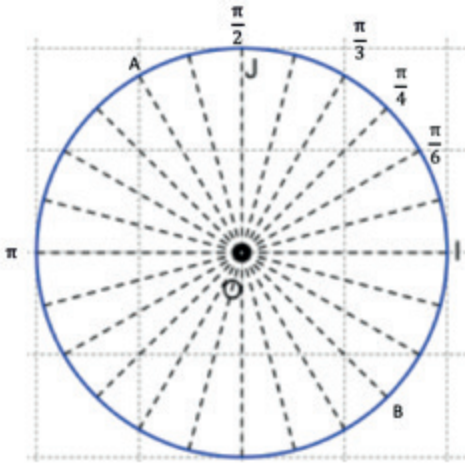
```
def seuil():
    h=3
    n=0
    while h>0.1:
        h=h*0.75
        n=n+1
    return n
```

**Exercice 23:**

Placer sur le cercle trigonométrique les points images des réels  $\frac{-22\pi}{3}$  et  $\frac{47\pi}{4}$ . Indiquer leur cosinus et leur sinus.

$$\frac{-22\pi}{3} = \frac{-24\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = -8\pi + \frac{2\pi}{3} \quad \text{On place le point image en A associé au réel } \frac{2\pi}{3}.$$

$$\frac{47\pi}{4} = \frac{48\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 12\pi - \frac{\pi}{4}. \quad \text{On place le point image en B associé au réel } -\frac{\pi}{4}.$$



$$\cos\left(\frac{-22\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{-22\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Exercice 24:** Simplifier l'expression suivante :

$$A(x) = \cos(3\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(6\pi - x)$$

$$A(x) = \cos(\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(-x)$$

$$A(x) = -\cos(x) + \cos(x) - \sin(x) - \sin(x) = -2\sin(x)$$

**Exercice 25:**

Résoudre dans  $[0; 2\pi[$  l'équation (E) :  $2\sin^2(x) = 1$  et l'inéquation (I) :  $2\cos(x) > \sqrt{2}$

$$(E) \Leftrightarrow \sin(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

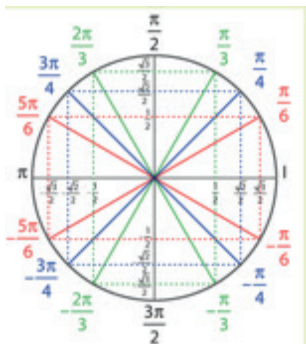
$$(E) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Or } x \in [0; 2\pi[ \quad \text{donc } x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$$

$$(I) : 2\cos(x) > \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On trace la droite d'équation  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et on relève les points du cercle situés au-dessus de cette droite.

Sur  $[0; 2\pi[$ , (I) admet donc pour solutions  $]0; \frac{\pi}{4}[ \cup ]\frac{7\pi}{4}; 2\pi[$ .



## Partie 6 – Géométrie

### Exercice 26 :

Soit ABCD un carré de côté 1. Soit M un point de [AB] tel que  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$  et N un point de [BC] tel que  $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

- 1) Faire une figure
- 2) En calculant le produit scalaire  $\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}$  de deux manières différentes déterminer la mesure exacte de l'angle  $\widehat{MDN}$ . On pourra introduire le repère (A,  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD}$ ).

### Corrigé :

1) Voir ci-contre.

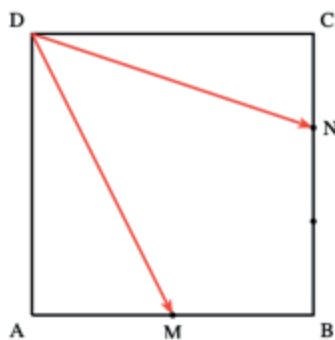
$$2) \overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN} = DM \times DN \cos(\widehat{MDN})$$

$$DM = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$DN = \sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\cos(\widehat{MDN}) = \frac{\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{DN}}{DM \times DN} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{3}} = \frac{5}{6} \times \frac{6}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{MDN} = \frac{\pi}{4}$$



### Exercice 27 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ). Soient A(-1; 4), B(2; 2) et C(1; 5). Déterminer une mesure arrondie au degré près de l'angle  $\widehat{BAC}$ .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \widehat{BAC}$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$$

$$\overrightarrow{AB} (3; -2) \text{ et } \overrightarrow{AC} (2; 1) \text{ donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 - 2 = 4$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad \text{donc } \cos \widehat{BAC} = \frac{4}{\sqrt{13} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\widehat{BAC} \approx 60^\circ$$

### Exercice 28 :

ABCD est un carré de côté a.

A'EFG est un carré de côté b, tel que A' ∈ [DG] et A' ∈ [BE].

Le point H est le milieu du segment [DE].

Le but de l'exercice est de prouver que les droites (AH) et (BG) sont perpendiculaires par deux méthodes.

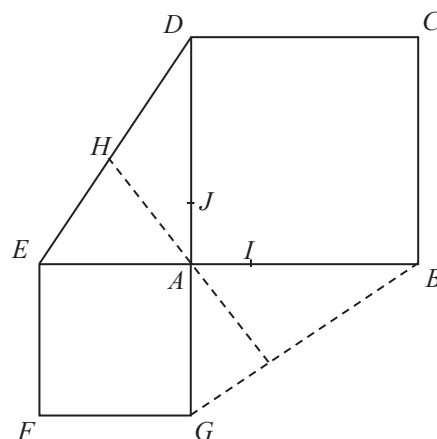
1) sans utiliser les coordonnées :

a) Montrer que  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AH}$

b) Calculer en le développant, le produit scalaire :

$$(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG})$$

c) En déduire que (AH) et (BG) sont perpendiculaires.



2) à l'aide des coordonnées :

On a placé sur le schéma les points  $I$  et  $J$  tels que  $AI = 1$  et  $AJ = 1$  ; on considère alors le repère  $(A; I, J)$ .

- a) Déterminer en fonction de  $a$  et  $b$ , les coordonnées des points  $E, D, B$  et  $G$ .  
 b) Montrer  $(AH)$  et  $(BG)$  sont perpendiculaires.

$$1) \quad \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HE}$$

Or  $H$  est le milieu du segment  $[DE]$  donc  $\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HE} = \vec{0}$  donc  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AH}$

$$(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}$$

Or  $(AD)$  et  $(BA)$  sont perpendiculaires donc  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$

$\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{AG}$  sont colinéaires donc  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG} = -ab$

$\overrightarrow{AE}$  et  $\overrightarrow{BA}$  sont colinéaires donc  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BA} = ab$

$(AE)$  et  $(AG)$  sont perpendiculaires donc  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$

Donc  $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}) = -ab + ab = 0$

Donc  $2\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$

Donc  $(AH)$  et  $(BG)$  sont perpendiculaires.

$$2) \quad E(-b; 0) \quad D(0; a) \quad B(a; 0) \quad G(0; -b) \quad H\left(\frac{-b}{2}; \frac{a}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AH}\left(\frac{-b}{2}; \frac{a}{2}\right) \quad \overrightarrow{BG}(-a; -b)$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BG} = \frac{ab}{2} - \frac{ab}{2} = 0$$

Donc  $(AH)$  et  $(BG)$  sont perpendiculaires.

**Exercice 29 :**

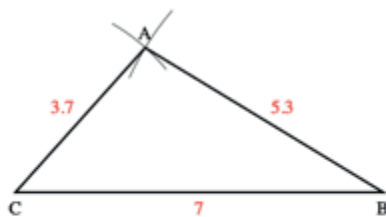
Soit le triangle  $ABC$  tel que  $BC = 7$  cm,  $AC = 3,7$  cm et  $AB = 5,3$  cm.

Calculer la valeur exacte de  $\cos \widehat{BAC}$  puis donner une valeur approcher de  $\widehat{BAC}$  à  $0,1^\circ$  près.

Calculer la valeur exacte de  $\cos \widehat{ABC}$  puis donner une valeur approcher de  $\widehat{ABC}$  à  $0,1^\circ$  près.

Corrigé :

1) On obtient la figure suivante :



$$2) \text{ D'après la relation d'Al-Kashi : } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{BAC} \Leftrightarrow$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3,7^2 + 5,3^2 - 7^2}{2 \times 5,3 \times 3,7} = -\frac{361}{1261} \approx -0,184.$$

$$\widehat{BAC} = \arccos\left(-\frac{361}{1261}\right) \approx 100,6^\circ.$$

3) Par une permutation circulaire,

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{5,3^2 + 7^2 - 3,7^2}{2 \times 5,3 \times 7} = \frac{317}{371} \approx 0,854.$$

$$\widehat{ABC} = \arccos\left(\frac{317}{371}\right) \approx 31,3^\circ.$$



### Exercice 30 :

1) Soit A et B deux points du plan tels que  $AB=6$  cm et I le milieu de  $[AB]$ .  
Déterminer l'ensemble  $(E_1)$  des points M tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 12$  (aide : étudier d'abord le cas où M appartient à la droite (AB) puis en déduire les autres cas).

Déterminer l'ensemble  $(E_2)$  des points M tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = -5$

Montrer que  $MA^2 + MB^2 = 26$  équivaut à  $MI^2 = 4$ . En déduire l'ensemble  $(E_3)$  des points M.

2) Soit le triangle ABC et I le milieu de  $[BC]$ . Déterminer l'ensemble  $(E_4)$  des points M tels que :  
 $\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ .

- $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 12$

Soit K le projeté orthogonal de M sur (AB).

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Or (AB) et (KM) sont perpendiculaires donc  $\overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Donc :  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AB} = 12 > 0$  donc les vecteurs  $\overrightarrow{AK}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont de même sens.

$$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AB} = AK \times AB = 6AK = 12 \text{ donc } AK = 2 \text{ et } AB = 6 \text{ donc } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

$(E_1)$  est donc l'ensemble des points de la droite perpendiculaire à (AB) passant par K.

- $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = -5$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

$$\text{Donc } M \in (E_2) \Leftrightarrow MI^2 - \frac{1}{4}AB^2 = -5$$

$$M \in (E_2) \Leftrightarrow MI^2 - \frac{36}{4} = -5$$

$$M \in (E_2) \Leftrightarrow MI^2 = 4$$

$$M \in (E_2) \Leftrightarrow MI = 2 \text{ (car } MI \geq 0)$$

Donc  $(E_2)$  est le cercle de centre I de rayon 2.

- $MA^2 + MB^2 = 26 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 26 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 26$

$$\Leftrightarrow MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + AI^2 + MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + BI^2 = 26$$

$$\Leftrightarrow 2MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + AI^2 + BI^2 = 26$$

or  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$MA^2 + MB^2 = 26 \Leftrightarrow 2MI^2 + 9 + 9 = 26$$

$$MA^2 + MB^2 = 26 \Leftrightarrow 2MI^2 = 8$$

$$MA^2 + MB^2 = 26 \Leftrightarrow MI^2 = 4$$

$$M \in (E_3) \Leftrightarrow MI = 2 \text{ (car } MI \geq 0)$$

Donc  $(E_3)$  est le cercle de centre I de rayon 2.

2)  $\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$

$$\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})$$
$$\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{MA} \cdot (2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})$$

Or I est le milieu de  $[BC]$  donc  $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$M \in (E_4) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$$

$$M \in (E_4) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$$

$(E_4)$  est donc le cercle de diamètre  $[AI]$ .

### Exercice 31 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soient  $A(3; 4)$ ,  $B(1; -1)$  et  $C(6; -2)$ .

- 1) Déterminer une équation cartésienne de  $(AB)$ .
- 2) Déterminer une équation cartésienne de la droite  $(d)$  passant par le point  $C$  et parallèle à la droite  $(AB)$ .
- 3) Déterminer une équation cartésienne de la droite  $(d')$  passant par le point  $A$  et perpendiculaire à la droite  $(BC)$ .
- 4) Déterminer une équation cartésienne du cercle  $C_1$  de diamètre  $[BA]$ .
- 5) Déterminer une équation de la tangente  $T$  au cercle  $C_1$  en  $B$ .

$$1) M(x; y) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ colinéaires}$$

$$\overrightarrow{AB}(-2; -5) \text{ et } \overrightarrow{AM}(x-3; y-4)$$

$$M(x; y) \in (AB) \Leftrightarrow -2(y-4) + 5(x-3) = 0$$

$$M(x; y) \in (AB) \Leftrightarrow 5x - 2y - 7 = 0$$

$$(AB) : 5x - 2y - 7 = 0$$

$$2) \text{L'équation réduite de la droite } (AB) \text{ est : } y = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$$

$$\text{L'équation réduite de la droite } (d) \text{ passant par le point } C \text{ est : } y = \frac{5}{2}x + p$$

$$C \in (d) \Leftrightarrow -2 = \frac{30}{2} + p$$

$$C \in (d) \Leftrightarrow p = -17$$

$$\text{L'équation réduite de la droite } (d) \text{ passant par le point } C \text{ est : } y = \frac{5}{2}x - 17$$

$$\text{Une équation cartésienne de } (d) \text{ est : } 5x - 2y - 34 = 0$$

$$3) \overrightarrow{BC}(5; -1)$$

$\overrightarrow{BC}$  est un vecteur normal à la droite  $(d')$ .

$$\text{Une équation cartésienne de la droite } (d') \text{ est : } 5x - y + c = 0$$

$$A \in (d') \Leftrightarrow 15 - 4 + c = 0$$

$$A \in (d') \Leftrightarrow c = -11$$

$$\text{Une équation cartésienne de la droite } (d') \text{ est : } 5x - y - 11 = 0$$

$$4) \text{ Soit } M(x; y) \text{ un point quelconque du plan, alors } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}.$$

$$M \in C_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) + (y+1)(y-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - x + 3 + y^2 - 4y + y - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 3y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{29}{4} = 0$$

$$M \in C_1 \Leftrightarrow (x-2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$$

$$5) M \in T \cap C_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$$

$$\overrightarrow{AB}(-2; -5) \text{ et } \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$$

$$M \in T \cap C_1 \Leftrightarrow -2(x-1) - 5(y+1) = 0$$

$$M \in T \cap C_1 \Leftrightarrow -2x - 5y - 3 = 0$$

$$T : -2x - 5y - 3 = 0$$

### Exercice 32 :

1) On considère l'équation  $x^2 + y^2 - x - 3y - 5 = 0$ .

Cette équation est-elle celle d'un cercle ? Si oui, en préciser le centre et le rayon.

$$x^2 + y^2 - x - 3y - 5 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 5$$

$$x^2 + y^2 - x - 3y - 5 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{30}{4}$$

$$x^2 + y^2 - x - 3y - 5 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{15}{2}$$

Il s'agit de l'équation du cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$  et de rayon  $\sqrt{\frac{15}{2}}$ .

2) On considère l'équation (E):  $x^2 - 2ax + y^2 + 4y + 8 = 0$

Pour quelles valeurs de  $a$  cette équation est-elle celle d'un cercle ? Préciser alors son centre et son rayon.

$$x^2 - 2ax + y^2 + 4y + 8 = (x - a)^2 - a^2 + (y - 2)^2 - 4 + 8$$

$$x^2 - 2ax + y^2 + 4y + 8 = (x - a)^2 + (y - 2)^2 + 4 - a^2$$

$$x^2 - 2ax + y^2 + 4y + 8 = 0 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - 2)^2 = a^2 - 4$$

Il s'agit de l'équation du cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $I(a; 2)$  et de rayon  $\sqrt{a^2 - 4}$  si et seulement si  $a^2 - 4 > 0$  donc si et seulement si  $a \in ]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[$ .

## Partie 7 – Probabilités

### Exercice 33:

Deux urnes contiennent chacune 5 boules. L'urne n°1 contient 2 boules blanches et 3 boules noires. L'urne n°2 contient une boule blanche et 4 boules noires. On lance un dé équilibré à 6 faces notées de 1 à 6. Si le dé est 6 on tire une boule dans l'urne n°1, sinon on tire une boule dans l'urne n°2. On gagne lorsque l'on obtient une boule blanche.

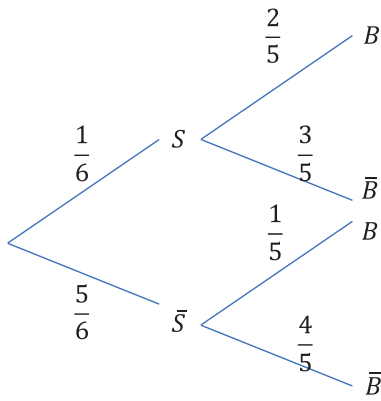
On note les évènements :

« S » : le résultat du dé est un 6,

« B » : on tire une boule blanche.

- 1) Donner sous forme de fraction irréductible les probabilités suivantes :  $p(S)$ ,  $p(\bar{S})$ ,  $p_S(B)$ ,  $p_{\bar{S}}(\bar{B})$
- 2) Construire un arbre pondéré décrivant le jeu.
- 3) Montrer que la probabilité de gagner à ce jeu est égale à  $\frac{7}{30}$ .
- 4) Un joueur a gagné. Quelle est la probabilité que la boule provienne de l'urne n°1 ?
- 5) Les évènements B et S sont-ils indépendants ?

$$1) p(S) = \frac{1}{6} \quad p(\bar{S}) = \frac{5}{6} \quad p_S(B) = \frac{2}{30} \quad p_{\bar{S}}(\bar{B}) = \frac{20}{30}$$



3) D'après la formule des probabilités totales, on a :  $p(B) = p(B \cap S) + p(B \cap \bar{S}) = \frac{2}{30} + \frac{5}{30}$

$$p(B) = \frac{7}{30}$$

4) L'urne 1 correspond à l'événement S.

$$p_B(S) = \frac{p(B \cap S)}{p(B)} = \frac{\frac{2}{30}}{\frac{7}{30}} = \frac{2}{7}$$

5) Deux événements  $B$  et  $S$  sont dits indépendants si et seulement si  $p(S \cap B) = p(S) \times p(B)$

$$p(S \cap B) = \frac{2}{30}$$

$$p(S) \times p(B) = \frac{1}{6} \times \frac{7}{30} = \frac{7}{180}$$

Donc

$p(S \cap B) \neq p(S) \times p(B)$  et donc  $B$  et  $S$  ne sont pas indépendants.

#### Exercice 34 :

On considère la variable aléatoire  $X$  dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous. On sait que :  $E(X) = 1,4$ . Calculer  $a$  et  $b$ . En déduire la variance et l'écart-type.

$x_i$	-5	-2	8
$p(X = x_i)$	0,2	$a$	$b$

$$p(X = -5) + p(X = -2) + p(X = 8) = 0,2 + a + b = 1$$

$$E(X) = 0,2 \times (-5) + a \times (-2) + b \times 8 = 1,4 \text{ soit } -1 - 2a + 8b = 1,4$$

$$\text{On résout le système : } (S) : \begin{cases} a + b = 0,8 \\ -2a + 8b = 2,4 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 1,6 \\ -2a + 8b = 2,4 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 10b = 4 \\ -2a + 8b = 2,4 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0,4 \\ a = 0,4 \end{cases}$$

$x_i$	-5	-2	8
$p(X = x_i)$	0,2	0,4	0,4

$$V(X) = 0,2 \times (-5 - 1,4)^2 + 0,4 \times (-2 - 1,4)^2 + 0,4 \times (8 - 1,4)^2$$

$$V(X) = 0,2 \times (-5 - 1,4)^2 + 0,4 \times (-2 - 1,4)^2 + 0,4 \times (8 - 1,4)^2$$

$$V(X) = 30,24$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 5,5$$

### Exercice 35 :

Après avoir misé 2€, on lance deux dés équilibrés. Si la somme des résultats obtenus est supérieure ou égale à 10, on gagne 10€, sinon on ne gagne rien.

Soit G la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur en €. Déterminer la loi de probabilité de G. calculer  $E(G)$  et interpréter le résultat obtenu.

Le tableau ci-dessous résume la somme des résultats obtenus à chaque expérience aléatoire :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Appelons S l'événement : le résultat obtenu est supérieur ou égale à 10.

$$p(S) = \frac{5}{36} = \frac{1}{6} \text{ et } p(\bar{S}) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

Les différentes valeurs prises par la variable aléatoire G sont : 8 et -2.

Calculons la probabilité prise par chaque valeur :

$$p(G = 8) = \frac{1}{6} \quad p(G = -2) = \frac{5}{6}$$

La loi de probabilité de G est donc :

$x_i$	-2	8
$p(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$E(X) = \frac{5}{6} \times (-2) + \frac{1}{6} \times 8 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$E(X) < 0$  donc ce jeu est défavorable au joueur.

### Exercice 36:

Un tireur participe à un concours de tir à l'arc et atteint sa cible neuf fois sur dix. Il tire 5 flèches sur la cible. Pour chaque flèche, s'il atteint la cible, il gagne 10 euros sinon il perd 20 euros. On suppose que les tirs sont indépendants.

- 1) Quelle est la probabilité d'atteindre au moins deux fois la cible ?
- 2) On appelle Y la variable aléatoire égale au gain du joueur à l'issue des 5 tirs.
  - a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?
  - b) Donner la loi de probabilité de Y
  - c) Quel est le gain moyen du tireur ? Est-ce intéressant pour lui ? Justifier.
  - d) Calculer la variance et l'écart-type.

1) Notons S l'événement « le tireur atteint sa cible » et  $S_2$  le tireur atteint au moins deux fois sa cible.

La probabilité de perdre 5 fois de suite est de  $\left(\frac{1}{10}\right)^5$ .

Il y a 5 chemins possibles conduisant le tireur à ne gagner qu'une fois ( $\bar{S}\bar{S}\bar{S}\bar{S}S$ ;  $\bar{S}\bar{S}\bar{S}S\bar{S}$ ;  $\bar{S}\bar{S}S\bar{S}\bar{S}$ ;  $\bar{S}S\bar{S}\bar{S}\bar{S}$ ;  $SS\bar{S}\bar{S}\bar{S}$ ), correspondant à une probabilité de  $\left(\frac{1}{10}\right)^4 \times \frac{9}{10}$ .

$$\text{Donc } p(S2) = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^5 - 5 \times \left(\frac{1}{10}\right)^4 \times \frac{9}{10} = \frac{99\,954}{100\,000}$$

Les valeurs prises par Y sont 50 (5 gains successifs), 20 (4 gains et un échec), -10 (3 gains et 2 échecs), -40 (2 gains et 3 échecs), -70 (1 gain et 4 échecs) et -100 (5 échecs).

La loi de probabilité de G est donc :

$x_i$	50	20	-10	-40	-70	-100
$p(X = x_i)$	$\left(\frac{9}{10}\right)^5$	$5 \times \left(\frac{9}{10}\right)^4 \times \frac{1}{10}$	$10 \times \left(\frac{9}{10}\right)^3 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2$	$10 \times \left(\frac{9}{10}\right)^2 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3$	$5 \times \left(\frac{1}{10}\right)^4 \times \frac{9}{10}$	$\left(\frac{1}{10}\right)^5$

$x_i$	50	20	-10	-40	-70	-100
$p(X = x_i)$	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001

$$E(X) = 50 \times 0,59049 + 20 \times 0,32805 - 10 \times 0,0729 - 40 \times 0,0081 - 70 \times 0,00045 - 100 \times 0,00001$$

$$E(X) \approx 35,7$$

$E(X) > 0$  donc ce jeu est favorable au joueur.

$$V(X) \approx 405$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 20,1$$

### Exercice 37:

Un restaurateur propose deux formules au déjeuner : le menu express à 12€ et le menu du jour à 15€. La bière est en supplément à 2€. 60% des clients choisissent le menu express et 70 % prennent une bière. De plus 40% des clients choisissant le menu du jour prennent une bière.

1) Compléter le tableau ci-dessous :

	Bière en supplément	Pas de bière	Total
Menu express	30	30	60
Menu du jour	40	0	40
Total	70	30	100

On choisit au hasard un client de ce restaurant et on note D la variable aléatoire représentant sa dépense en €.

- Déterminer la loi de probabilité de D.
- Calculer l'espérance de D et interpréter le résultat obtenu.
- Le restaurateur fait 200 repas par déjeuner. Quelle recette peut-il espérer ?

Les valeurs prises par D sont 12 (menu express), 15 (menu du jour), 17 (Menu du jour avec bière), 14 (Menu express avec bière).

La loi de probabilité de G est donc :

$x_i$	12	14	15	17
$p(X = x_i)$	0,3	0,3	0	0,4

$$E(X) = 12 \times 0,3 + 14 \times 0,3 + 15 \times 0 + 17 \times 0,4$$

$$E(X) = 14,6$$

L'espérance de gain du restaurateur est donc de 14,6€. Avec 200 repas, il peut espérer avoir une recette R de 2920€.

$$R = 14,6 \times 200 = 2920\text{€}$$